ESTUDIO COMPARATIVO DE RECTAS DE REGRESIÓN OBTENIDAS MEDIANTE EL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS ORTOGONALES

ÁLVARO DE JESÚS VILLOTA VIVEROS

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE INGENIERÍA INDUSTRIAL
MAESTRÍA EN INVESTIGACIÓN OPERATIVA Y ESTADÍSTICA
SAN JUAN DE PASTO, MARZO DE 2018

ESTUDIO COMPARATIVO DE RECTAS DE REGRESIÓN OBTENIDAS MEDIANTE EL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS ORTOGONALES

ÁLVARO DE JESÚS VILLOTA VIVEROS

Trabajo de Grado como requisito parcial para optar al título de Magister en Investigación Operativa y Estadística

Director de Tesis
ARSENIO HIDALGO TROYA
M.Sc en Estadística

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE INGENIERÍA INDUSTRIAL
MAESTRÍA EN INVESTIGACIÓN OPERATIVA Y ESTADÍSTICA,
SAN JUAN DE PASTO, MARZO DE 2018

DEDICATORIA

A Guillermo e Inés, mis padres por brindarme infinito amor y promover en mi sed de conocimiento.

AGRADECIMIENTOS

Al Magister Arsenio Hidalgo Troya, director de la investigación por su amistad de muchos años, apoyo y dirección en el desarrollo de este trabajo.

Al Magister Hernán Abdón García, Coordinador la Maestría en Investigación Operativa y Estadística en Pasto, por gestionar programas de post grado científico en la Universidad de Nariño, jurado de Trabajo de Grado.

Al Magister Álvaro Trejos Carpintero, jurado de Trabajo de Grado.

Al Doctor José Adalberto Soto Mejía director de la Maestría en Investigación Operativa y Estadística de la Universidad Tecnológica de Pereira por favorecer el desarrollo integral de nuestra región liderando con compromiso y entrega la Maestría en Investigación Operativa y Estadística.

RESUMEN

Se desarrolla un método inédito general matricial para obtener parámetros de hiperplanos de Mínimos Cuadrados Ortogonales. Como particularización en $\mathbb{R}^2$ se encuentran los parámetros de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales.

Haciendo rotar la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales sobre el centroide de los puntos dados, se determina el valor de la suma de cuadrados de distancias ortogonales para cualquier valor de pendiente de la recta. Con este giro aparecen nuevas rectas notables, aquella cuya suma de cuadrados ortogonales es máxima se denomina “Recta de Máximos Cuadrados Ortogonales” y dos más: una cuya suma de cuadrados de distancias ortogonales promedio es la varianza de x y otra para la cual la suma de cuadrados de distancias ortogonales promedio es la varianza de y. Se establecen relaciones geométricas de estas rectas y se plantean utilidades prácticas de estos lugares en el plano.

Se determinan propiedades geométricas de la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales.

Para todos los escenarios posibles de varianzas, covarianzas y coeficientes de correlación de las dos variables de un conjunto de puntos se establece la magnitud de la diferencia de la suma de distancias cuadradas verticales a la Recta de Mínimos Cuadrados que en este estudio se llamara “Recta de Mínimos Cuadrados Verticales” y la suma de distancias perpendiculares a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales.

Para todas las posibilidades varianza, covarianzas y coeficientes de correlación de las variables de los puntos, se establece la diferencia angular cuando se emplea el método de Mínimos Cuadrados Ortogonales y el Sistema de Mínimos Cuadrados Tradicionales, llegándose a demostrar que, bajo ciertas circunstancias, dicha diferencia puede ser enorme, llegando incluso a tomar el valor de $\pi/2$.

Para las diferencias en suma de cuadrados de distancias y ángulos se establecen las respectivas expresiones matemáticas y sobre ellas se definen discrepancias máximas y mínimas. Se establecen los coeficientes de correlación que corresponden a esas diferencias extremas.

Profundizando la suma de cuadrados de distancias ortogonales, se determina la esperanza matemática y la varianza de dicha suma al conjunto de rectas que pasan por el centroide de los puntos.

Se establece Función de Densidad de Probabilidad y Función de Distribución de suma de distancias cuadradas ortogonales a las rectas que pasan por el centroide de los puntos y paralelamente Función de Densidad de Probabilidad y de Función de Distribución de suma de distancias cuadrados verticales (tradicionales) a rectas que pasan por el centroide de los puntos.

Sin ser el objetivo primordial del estudio el ajuste de regresión ortogonal se compara el valor R^2 entre las dos rectas estudiadas, lográndose establecer mejores resultados en la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales. Finalmente se adaptan las expresiones de Intervalo de Confianza de los parámetros de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales en concordancia a la teoría desarrollada en el presente estudio, se practican comparaciones.

Como aplicación adicional, aprovechando las Funciones de Densidad de Probabilidad y de Distribución de Probabilidad de sumas de distancias cuadrados ortogonales se diseña una “Versión Inédita y novedosa de la Aguja de Buffon” que permite estimar el número π.

Palabras clave: Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales, Recta de Mínimos Cuadrados de errores verticales, comparación geométrica en regresiones lineales, Rectas asociadas a Regresión Mínimos Cuadrados Ortogonales, Funciones de Densidad de Probabilidad y Distribución de suma de cuadrados, Coeficiente de Determinación.

ABSTRACT

An unprecedented general matrix method is developed to obtain parameters of Orthogonal Least Squares hyperplanes. As a particularization in $\mathbb{R}^2$, the parameters of the Orthogonal Least Squares Straight are obtained.

By rotating the Straight of Orthogonal Least Squares on the centroid of the given points, the value of the sum of squares of orthogonal distances is determined for any slope value of the line. With this turn appear remarkable new lines, that whose sum of orthogonal squares is maximum is called "Straight Orthogonal Square Maxima" and two more: one whose sum of squares of average orthogonal distances is the variance of x and another for which the sum of squares of orthogonal distances is the variance of y. Geometric relationships of these lines are established and practical utilities of these places in the plane are proposed.

Geometric properties of the Straight of the Orthogonal Least Squares are determined.

For all the possible scenarios of variances, covariances and correlation coefficients of the two variables of a set of points, the magnitude of the difference of the sum of vertical square distances to the Straight of Least Squares that in this study will be called “Vertical Smallest Squares Straight" and the sum of the perpendicular distances to the Straight of Orthogonal Least Squares.

For all the possibilities variance, covariance and correlation coefficients of the point variables, the angular difference is established when using the Orthogonal Least Squares method and the Vertical Least Squares System, showing that under certain circumstances, this difference It can be huge, even reaching the value of π / 2.

For the differences in sum of squares of distances and angles the respective mathematical expressions are established and on them maximum and minimum discrepancies are defined. The correlation coefficients that correspond to these extreme differences are established.

Deepening the sum of squares of orthogonal distances, determines the mathematical expectation and the variance of said sum to the set of straight lines that pass through the centroid of the points.

The Probability Density Function and the Distribution Function of the sum of the square distances orthogonal to the straight lines passing through the centroid of the points are established and, in parallel, the Probability Density Function and the Distribution Function of the sum of vertical (traditional) square distances to lines that pass through the centroid of the points.

Without being the primordial objective of the study, the orthogonal regression adjustment is compared to the value R^2 between the two lines studied, achieving better results in the Straight of Orthogonal Least Squares. Finally, the Confidence Interval expressions of the parameters of the Orthogonal Least Squares Straight are adapted according to the theory developed in the present study, comparisons are practiced.

As an additional application, taking advantage of the Probability Density and Probability Distribution Functions of orthogonal square distance sums, an "Unpublished and novel version of the Buffon Needle" is designed to estimate the number π.

Key words: Orthogonal Least Squares Straight, Least Squares Line of Vertical Errors, Geometric Comparison in Linear Regressions, Lines Associated with Orthogonal Least Square Regressions, Probability Density Functions and Sum of Square Distribution, Determination Coefficient.

Tabla de Contenido

Tabla de graficas

INTRODUCCIÓN

La Recta de Los Mínimos Cuadrados empleada tradicionalmente en Estadística, contempla como método para la determinación de sus parámetros (“a” corte con el eje vertical y “b” pendiente) la mínima suma de los cuadrados de los errores verticales es decir mínima suma de los cuadrados de las distancias verticales desde cada punto hasta la recta.

Sin embargo, las distancias de un conjunto de puntos a las rectas, desde la óptica estrictamente geométrica no son verticales sino ortogonales. Surge entonces la necesidad de encontrar una recta a partir de este concepto, es decir que la suma de los cuadrados de las distancias ortogonales desde los puntos sea mínima.

El autor del presente trabajo, logró deducir los parámetros de dicha recta, posteriormente en la revisión bibliográfica encontró que previamente algunos investigadores habían trabajado en la recta de mínimos cuadrados ortogonales llegando a idénticos resultados.

WILLIAM EWARDS DEMING (1900 -1993) fue un Físico y Estadístico Norteamericano profesor de las universidades de Nueva York y Columbia. Su obra está asociada con el desarrollo del Japón en época de la postguerra. El consideró la existencia de errores tanto en la observación de “x”, como en la observación de “y”. Estableció la regresión que lleva su apellido “Regresión de Deming”.

Cuando la varianza en los errores de “x” es igual a la varianza de los errores de “y” La Regresión de Deming toma la forma ortogonal, es decir que la suma de los cuadrados de las distancias ortogonales a la recta es mínima.

Teniendo las dos versiones de recta: Mínimos Cuadrados de errores verticales que llamamos Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) y Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO), se justifica realizar un estudio comparativo extenso y muy detallado sobre los resultados que cada una de ellas ofrece, específicamente respecto a los parámetros, la suma de cuadrados de distancias desde los puntos y ellas y las diferencias angulares, involucrando varianzas, covarianzas y coeficientes de correlación.

La búsqueda de publicaciones sobre cotejos entre los resultados de los aspectos planteados entre los dos tipos de rectas de regresión, no ofrece resultados amplios y cuando abordan este tópico lo hacen respecto a los ajustes. Las discrepancias de suma de cuadrados de distancias, pendientes y ángulos son tratados de manera muy tangencial y superficial. La comparación analítica que se realiza en este trabajo considera todas las circunstancias y con detallados resultados teóricos y gráficos pretende ser inédita y útil.

En general conviene conocer para todos los casos y situaciones matemáticas que se puedan presentar, las diferencias entre los parámetros, especialmente el de pendiente que se traduce en disparidad angular y las magnitudes respectivas, lo mismo que la diferencias entre sumas de cuadrados de distancias.

Esas diferencias tanto angulares como de suma de cuadrados de distancias ameritan ser expresadas como funciones de las varianzas, las covarianzas y los coeficientes de correlación para todas las circunstancias posibles.

En este trabajo se demuestra que bajo ciertas ciertos escenarios de varianzas, covarianzas y coeficientes de correlación existen diferencias grandes extremas en la pendiente y la suma de cuadrados de distancias, cuando se aplican los dos métodos. Se encuentran las diferencias máximas y mínimas en radianes entre los ángulos de las rectas de los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) y Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV).

Se determina los coeficientes de correlación para los cuales las diferencias angulares en radianes entre las dos rectas de regresión son máximas. Para lo anterior se presentará una función de diferencia, el análisis se practica con la aplicación de los principios del cálculo diferencial.

Este estudio demuestra que, en algunas situaciones, para un mismo conjunto de puntos, la diferencia angular entre la Recta de los Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) y la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) puede ser hasta $\pi/2$ situación extrema que enfrenta seriamente las dos versiones.

Dado que la ecuación para definir el parámetro de pendiente de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales es de segundo grado, es inquietante conocer el significado del segundo valor que resulta de la solución y si esté incluye la existencia de otra recta con sus respectivas propiedades, implicaciones y usos.

La casi nula disponibilidad de estudios sobre distancias cuadradas ortogonales de un conjunto de puntos a rectas que pasan por su centroide, abre un campo paralelo sobre teorización estadística – probabilística y aplicabilidad de estas distancias, oportunidad que no se desaprovecha en el desarrollo de este proyecto y por lo tanto se incluye.

En la parte inicial del proyecto se amplía el concepto de distancias cuadradas mínimas ortogonales a un hiperplano en $\mathbb{R}^m$ y posteriormente se particulariza a $\mathbb{R}^2$ llegándose a definir los parámetros de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales de tal manera que la regresión en dos dimensiones será simplemente un caso reducido del modelo expuesto. Se entrega una solución inédita matricial creada por el autor en $\mathbb{R}^m$ que incluye el conjunto de ecuaciones de segundo grado suficientes para obtener los distintos parámetros del hiperplano de mínimos cuadrados ortogonales para m variables. En los capítulos siguientes el proyecto se trabaja en las dos dimensiones a las que hace referencia la regresión de Mínimos Cuadrados Ortogonales.

El propósito global del proyecto es desarrollar un trabajo inédito analítico teórico comparativo que aborde una temática muy poco explorada hasta el momento y que permita ilustrar diferencias entre parámetros, distancias ortogonales y ángulos entre dos regresiones lineales, pero también realizar estudios estadísticos y probabilísticos sobre suma de cuadrados ortogonales a rectas de regresión y a otras que pasando por su mismo centro de gravedad se desvíen angularmente de las originales.

Tratándose de una recta que bajo el criterio de suma de cuadrados de distancias ortogonales, se aproxima de la mayor manera posible a un conjunto de observaciones (y) era de esperarse que este lugar geométrico tuviese aplicación en Regresión Lineal como en realidad sucede en amplios campos del conocimiento especialmente en astronomía y química.

Desde el punto de vista de la regresión, la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales admite residuales no solo en una variable sino en las dos cuando las varianzas en los errores para las dos variables son iguales. A esta conclusión se puede llegar luego de trabajar adecuadamente la Regresión de Deming.

Aplicando el criterio de las distancias ortogonales, y considerando que la ecuación para obtener b es de segundo grado, aparece un valor de b que maximiza la suma de cuadrados de distancias ortogonales, determinando una nueva recta que llamaremos “Recta de Máximos Cuadrados Ortogonales” está es la Recta que pasando por el centroide de un conjunto de puntos se separa más de los mismos. Inmediatamente aparece utilidad de este lugar geométrico, por ejemplo, cuando se quiere establecer una trayectoria que quiera evitar lo máximo posible la cercanía con puntos existentes, bajo la condición de pasar por el centro geométrico de los puntos como sucede en astronomía.

En el desarrollo del proyecto también aparecen rectas que pasando por el centroide de un conjunto de puntos podrán espaciarse en promedio una suma de distancias cuadradas elegida a partir de un conjunto de puntos. Esto podría usarse cuando se desea establecer una trayectoria que no se acerque ni se aleje demasiado del conjunto de puntos por ejemplo cuando se quiere diseñar un sistema de alcantarillado o línea eléctrica cuya trazado debe reunir las dos condiciones de separarse de las viviendas para evitar afectación a la salud, pero no tanto para que la tributación de caudales sea posible y económica a través de colectores o líneas de suministro, el método se podría aplicar para calcular la orientación de esa línea que pasando por el centro de la población, se aleje en promedio de las viviendas una distancia que garantice la salud de los habitantes de esas moradas. .

Se exponen dos rectas notables fundamentadas en la suma de cuadrados ortogonales: una cuya distancia cuadrada ortogonal promedio a los puntos sea la varianza de x y otra cuya distancia cuadrada ortogonal promedio a los puntos sea la varianza de y, cuando las rectas pasan por el centro geométrico de los puntos.

Se establecen y deducen relaciones interesantes entre todas las rectas expuestas: La Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) es perpendicular a la Recta de los Máximos Cuadrados Ortogonales, mientras que la recta notable cuya distancia cuadrada ortogonal promedia es la varianza de x, tiene una pendiente igual a la semisuma de las pendientes de la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales y la Recta de los Máximos Cuadrados Ortogonales. Además, la recta notable cuya distancia cuadrada ortogonal promedia a los puntos es la varianza de x es perpendicular a la recta notable cuya distancia cuadrada ortogonal promedia a los puntos es la varianza de y.

Se estudian las relaciones existentes entre las pendientes de Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) , Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCV) y aquella recta que se deduce a partir de Mínimos Cuadrados Horizontales.

El estudio de sumas de distancias cuadradas ortogonales a rectas que pasan por el centro geométrico de los puntos, despierta la necesidad de calcular media y varianza de esas sumas. Se encuentran las respectivas expresiones luego de trabajar con el cálculo integral y la teoría de momentos estadísticos.

Se establecen funciones de Densidad de Probabilidad y de Distribución de Probabilidad de sumas de cuadrados ortogonales a rectas que pasan por el centroide de un conjunto de puntos. Funciones que se encuentran y grafican en el estudio propuesto. Esas funciones definen la probabilidad de los valores de suma de cuadrados de distancias ortogonales cuando la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales sufre desfases angulares al girar por el centroide del conjunto de puntos dado. Se aplican estas funciones a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales

Paralelamente es importante determinar las funciones de Densidad de Probabilidad y de Distribución de Probabilidad de las sumas de cuadrados verticales (tradicionales) de un conjunto de puntos a las rectas que pasan por el centro geométrico de las mismas. Es decir que se define la probabilidad de los valores de suma de cuadrados de distancias verticales cuando la Recta de Mínimos Cuadrados Tradicional sufre desfases angulares al girar por el centroide del conjunto de puntos dado. Se aplican estas funciones a la Recta de Mínimos Cuadrados Tradicionales.

Sin ser el propósito primordial del trabajo el ajuste de los lugares geométricos obtenidos por el método de Mínimos Cuadrados se realiza un estudio inédito comparativo del valor R^2 logrado por Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) y Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO). Se demuestra que la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales tiene un mejor valor R^2 con respecto a la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales.

Se toman los intervalos de confianza para los parámetros previamente establecidos en la teoría de Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales y se los adecua a formas reducidas y directas, empleando las expresiones y relaciones que se establecen en el desarrollo de este proyecto.

Se comparan las varianzas del parámetro de pendiente para los dos tipos de regresiones estudiadas.

Finalmente y como apéndice no relacionado directamente (pero si indirectamente) con el propósito de este estudio, se aprovecha el conocimiento adquirido en el desarrollo del proyecto para resolver un problema novedoso asociado al clásico planteado en el siglo XVIII por GEORGES LOUIS LECLERC, Conde de Buffon (Problema del aguja de Buffon), El cual consiste en lanzar una aguja de cierta dimensión sobre el piso rayado con líneas rectas paralelas y en función de la probabilidad de interceptar o no la retícula estimar el número π. En la propuesta del proyecto, una recta es la aguja y rota alrededor del centroide de un conjunto de puntos, se hace girar tal como lo hace una ruleta. En cada posición se mide la suma de distancias cuadradas ortogonales de la recta al conjunto de puntos, Se determina la probabilidad de que tal suma sea menor a una suma de cuadrados de distancias ortogonales que se establecerá analíticamente en el desarrollo del problema y superior a otra suma de cuadrados de distancias ortogonales (que también se deduce). Con fundamento en tal probabilidad se estima el número π. Se realizan simulaciones.

CAPITULO 1

PRELIMINARES

1.1. Planteamiento del Problema.

En general y teniendo en cuenta lo expuesto en el ítem anterior, Se requiere encontrar las diferencias en las rectas de regresión cuando se emplea el método de los mínimos cuadrados verticales (Tradicional) y los mínimos cuadrados ortogonales. Considerando que desde el punto de vista estrictamente geométrico las distancias de los puntos a las rectas son ortogonales, se propone desarrollar una teoría inédita que puede ser empleada en solución de problemas prácticos fundamentada en sumatorias de distancias cuadradas ortogonales a rectas que pasan por el centroide geométrico de un conjunto de puntos.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General:

Practicar un estudio teórico, analítico y comparativo entre la recta de Regresión ortogonal "Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales" (RMCO) que utiliza suma de cuadrados de distancias ortogonales y la Recta de Mínimos Cuadrados de Residuales Verticales (RMCV), en función de sus discrepancias angulares y de suma de cuadrados de distancias ortogonales a las rectas. Desarrollar una teoría relacionada con suma de cuadrados de distancias ortogonales.

1.2.2. Objetivos Específicos:

Obtener los parámetros de La Recta de Los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO), como particularización en $\mathbb{R}^2$ de un planteamiento inédito generalizado de un Hiperplano de Mínimos Cuadrados Ortogonales en $\mathbb{R}^m$.

Establecer exhaustivamente geométrica y matemáticamente las diferencias angulares y de suma de cuadrados de distancias entre la Recta de Mínimos Cuadrados de Residuales Verticales (tradicional) (RMCV) y La Recta de Los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO), bajo todas las situaciones de varianza en "x", varianza en "y", covarianza (x, y) y coeficientes de correlación. Comparar las pendientes y establecer relaciones entre ellas

Estudiar otras rectas que, pasando por el centroide de un conjunto de puntos, tienen una suma de cuadrados de distancias ortogonales máxima o un valor predeterminado, dependiendo de las necesidades teóricas o prácticas en un problema. Establecer todas las propiedades y relaciones geométricas, estadísticas y matemáticas existentes entre ellas.

Estudiar la suma de cuadrados de distancias ortogonales cuando La Recta de Los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO), experimenta desfases angulares al girar sobre su centroide, mediante la determinación de esperanza matemática, varianza, Función de Densidad de Probabilidad y Función de Distribución de Probabilidad para dicha suma. Realizar igual investigación respecto a las dos funciones de probabilidad descritas para la suma de cuadrados residuales verticales, cuando la Recta de Mínimos Cuadrados de Residuales Verticales (RMCV) experimenta el desfase angular mencionado.

Realizar aplicaciones de las Funciones de Densidad de Probabilidad y Funciones de Distribución de Probabilidad encontradas

Comparar las varianzas en sumas de cuadrados de distancias cuando se usa la Recta de Mínimos cuadrados Ortogonales (RMCO) y la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV).

Realizar estudios estadísticos y probabilísticos de la suma de cuadrados de distancias (ortogonales y verticales) de las rectas de mínimos cuadrados que pasan por el centroide del conjunto de puntos cuando estas rectas sufren desfases angulares.

Encontrar relación entre la suma de cuadrados de distancias verticales y ortogonales a las rectas que pasan por el centroide del conjunto de puntos.

Comparar el Coeficiente de Determinación R^2 logrado cuando se usa Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) y Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV).

Adaptar los intervalos de confianza de los parámetros de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales expresándolos en función de la suma de cuadrados de distancias ortogonales y de la nomenclatura que se desarrolla en el presente estudio.

Comparar la varianza de los parámetros de pendiente encontrados para las dos rectas de regresión estudiadas (Mínimos Cuadrados Ortogonales y Mínimos Cuadrados Tradicionales).

Aplicar las Funciones de Densidad de Probabilidad y de Distribución de probabilidad descritas y todo el conocimiento desarrollado en el diseño de una “Novedosa Aguja de Buffon” en la cual la aguja es una recta que pasa por el centroide de un conjunto de puntos la cual gira aleatoriamente por el centroide y en función de la probabilidad de ocurrencia que la suma de cuadrados ortogonales de las distancias de los puntos a ella, este comprendida entre un valor mínimo que se determinará y otro valor que también se deducirá, estimar el número π.

1.3. Diseño Metodológico

Para aplicar la distancia ortogonal de un punto en $\mathbb{R}^m$ a un hiperplano en general, la geometría analítica clásica aporta los fundamentos para deducir la expresión en función de los parámetros del lugar geométrico lineal en $\mathbb{R}^m$ y de las coordenadas del punto.

Con base en la expresión de distancia ortogonal de un punto a un hiperplano, se establece la suma de los cuadrados de las distancias de puntos conocidos al lugar geométrico cuyos parámetros (coeficientes) son desconocidos.

Para encontrar suma de mínimos cuadrados ortogonales se deriva parcialmente dicha suma con respecto a cada uno de los parámetros y se igualará a cero.

Por cada parámetro se obtiene una ecuación. Es interesante indicar que la derivación del parámetro de corte, aquel que no multiplica variable lleva inmediatamente a la conclusión que el hiperplano buscado pasa por el centro geométrico del conjunto de puntos.

El sistema así establecido involucra tantas ecuaciones como parámetros existan.

Considerando que el hiperplano es una expresión lineal igualada a cero, uno de los parámetros que multiplica variable puede fijarse como 1, pudiéndose disminuir una ecuación.

Las soluciones del sistema aplicadas a los criterios de segunda derivada y Hessiana definirán si la suma de cuadrados de distancias ortogonales es máxima o mínima.

En el presente estudio cuando el número de variables total es mayor o igual a tres, se concluye el procedimiento con el planteamiento de las ecuaciones resultantes de las primeras derivaciones parciales igualadas a cero.

Se observa que las ecuaciones resultantes de las derivaciones parciales son de segundo grado para cada parámetro que multiplique a cada variable.

A todo el procedimiento anterior se le da una presentación general matricial y vectorial.

Sobre esa presentación vectorial, se aplica la particularización a dos variables, obteniéndose los parámetros de corte y de pendiente correspondientes.

Se emplea conceptos generales de Estadística, cálculo, geometría Analítica y Algebra lineal.

Una vez obtenida la particularización de la Recta de Los Mínimos Cuadrados Ortogonales, con el uso del cálculo diferencial e integral, la estadística y la geometría analítica, se establecen funciones de diferencias entre sumas de cuadrados de distancias y ángulos, entre la Recta de Mínimos Cuadrados de Residuales Verticales y Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales, dichas funciones se examinan para todas las circunstancias posibles de varianzas en cada variable, covarianzas y coeficientes de correlación, se evalúan la diferencias, se graficaran y se establece cuando las diferencias son mínimas o máximas

Con el uso del Cálculo, la Estadística y la Geometría Analítica, se determinan rectas que cumplan requisitos de sumas de cuadrados de distancias ortogonales no solo mínima, sino también máxima en este caso haciendo uso de la segunda respuesta que ofrece la solución del parámetro “b”. Se encuentran otras rectas que en promedio tengan una suma de cuadrados ortogonales particulares, como por ejemplo solo en función de V(x) o de

V(y) sin ser de pendiente cero o infinito. También otras rectas de suma de cuadrados de distancias ortogonales predeterminadas. Disponiendo de ese conjunto de nuevas rectas, se establecen relaciones matemáticas, geométricas y estadísticas entre ellas.

Se recurre a la aplicación de las definiciones de momentos estadísticos para lograr esperanza matemática y varianza de la suma de cuadrados ortogonales a la las rectas que pasan por el centroide de un conjunto de puntos.

Se aplica la Teoría de Probabilidad, la Geometría Analítica, el Cálculo Diferencial e Integral y concretamente las definiciones de Función de Densidad de Probabilidad y Función de Distribución para obtener Las Funciones de Probabilidad y de Distribución de Probabilidad de la suma de cuadrados de distancias ortogonales y también de sumas de cuadrados de distancias verticales a rectas que pasan por el centroide de un conjunto de puntos.

Se recurre a la definición de R^2 (Coeficiente de Determinación) para realizar comparaciones entre las dos versiones de regresión lineal tratadas en el trabajo.

Empleando las expresiones de varianza e intervalo de confianza del parámetro de pendiente de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales, se hace una adaptación de las mismas para lograr finalmente una comparación de varianza e intervalo de confianza entre las Rectas de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO y Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV).

Para establecer una novedosa aguja de Buffon y estimar el número π se aplica la teoría desarrollada en el proyecto, soportada en la Teoría de Probabilidad, La Estadística, el Cálculo diferencial e integral y la solución de límites trigonométricos en funciones inicialmente indeterminadas. En la simulación se utiliza el programa Matlab.

1.4. Marco Teórico.

Distancia geométrica entre dos puntos.

En [1] Lehmann, Ch (1989) se demuestra que la distancia geométrica entre dos puntos es la raíz cuadrada de la suma de las diferencias de las coordenadas al cuadrado.

Distancia geométrica de un punto a un hiperplano.

En [1] Lehmann, Ch (1989) se afirma que la distancia euclidiana desde un punto p a un hiperplano es igual al valor absoluto de la suma de los productos entre los coeficientes de cada variable del hiperplano por el valor de dicha variable del punto más la constante dividido entre la raíz cuadrada de la sumatoria de los cuadrados de los coeficientes de las variables del hiperplano. .

Suma de cuadrados de un conjunto de puntos a una recta

[1] Lehmann, Ch (1989) Si se particulariza la expresión de distancia euclidiana de un punto a un hiperplano a dos variables se obtiene que la distancia de un punto a una recta es igual al valor absoluto del resultado del producto del coeficiente de "x" de la recta por

el valor de dicha variable en el punto más el producto del coeficiente de "y" en la recta más la constante, esto dividido entre la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los coeficientes de las variables de la recta. La distancia resultante será la medida de la perpendicular trazada desde el punto a la recta.

De esta manera si la recta de regresión es:

$$y = a + bx$$

La suma de cuadrados de distancias del conjunto de puntos viene dada por la expresión:

$$S = \sum \left(\frac{bx_i - y_i + a}{\sqrt{b^2 + 1}} \right)^2$$

A diferencia de la regresión lineal ordinaria o tradicional que emplea:

$$S = \sum (y_i - (a + bx_i))^2$$

Discrepancias angulares.

En este estudio se llamará "Discrepancias angulares" las diferencias en ángulo o en pendiente entre la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) y la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) establecidas para un conjunto de puntos. Dichas diferencias se trataran profundamente considerando todas las circunstancias posibles.

Método de Mínimos Cuadrados Verticales (Ordinarios o Tradicionales).

[2] Walpole, Myers, Ye (2007), denomina de esta forma al método diseñado para definir los parámetros en un modelo de regresión lineal, el objetivo es minimizar la suma de los cuadrados de las distancias verticales de los resultados que se observan y aquellos que estima el modelo. Supone el modelo que los errores se distribuyen normalmente, son homocedásticos y no están auto correlacionados. El estimador resultante es insesgado y de máxima verosimilitud. En el presente estudio llamaremos al método "Mínimos Cuadrados Verticales" (RMCV).

Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV).

En [2] Walpole, Myers, Ye (2007), se deducen los parámetros de la Recta de Los Mínimos Cuadrados Verticales es decir aquella que minimiza la suma de los cuadrados de los errores en Y, que geométricamente son las distancias verticales a la recta estimada. Siendo la recta y= a+bx, el parámetro b resultante es igual al cociente entre la covarianza de las dos variables sobre la varianza de x. El valor de a, simplemente es igual a la media de los valores de y menos el producto de b por la media de los valores de x.

Regresión de Deming

En [3] Deming W. E. (1943) Se expone la Regresión de Deming con errores para las mediciones de la variable "x" y la variable "y", para varianzas distintas de dichos errores, sin embargo, se indica que en la mayoría de los casos esas varianzas son iguales, bajo esas condiciones la Regresión de Deming se convierte en la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales que en el pasado ya había sido abordada por [4] Adcock R. J. (1878) y [5] Coolidge J.L (1913).

Conceptos básicos de Estadística, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial y Algebra Lineal para establecer el Hiperplano de Mínimos Cuadrados Ortogonales y su particularización en $\mathbb{R}^{2}$.

Para el desarrollo del presente estudio, y principalmente en la parte inicial, en la cual se presenta una particularización inédita de la Recta de Regresión Ortogonal de Mínimos Cuadrados a partir de una generalización también novedosa de un Hiperplano de Mínimos Cuadrados, con expresiones vectoriales y matriciales, se requiere fundamentos sólidos de cálculo multivariado que incluya algebra matricial. Este sustento lo ofrecen muchos textos de matemática y estadística clásicos. También se necesita el manejo adecuado de los criterios de primera y segunda derivada para definir puntos críticos. El sustento de los rudimentos básicos puede encontrarse en [6] Apostol T.M. (2006) Cálculo de funciones de varias variables y algebra lineal con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y probabilidad.

Funciones de Densidad de Probabilidad y de Distribución de Probabilidad.

Es necesario conocer el significado y aplicación de la Función de Densidad de Probabilidad, al respecto [7] Zylberberg A.D. (2008) afirma que la Función de Densidad de Probabilidad asigna a cada valor posible de la variable aleatoria un número real que consiste en la probabilidad de que ocurra, y por supuesto debe cumplir con las dos condiciones a) no puede ser negativa en un punto. b) la suma de probabilidades de todos los valores debe ser 1.

En el mismo texto Zylberberg A.D. se refiere a la Función de Distribución de Probabilidad, e indica que es una función de probabilidad acumulada, para todos los valores con probabilidad no nula desde menos infinito hasta x.

Los conceptos de Función de Densidad de Probabilidad y de Distribución de Probabilidad se emplean ampliamente en el desarrollo del trabajo.

Momentos Estadísticos.

La definición de momentos es importante para determinar esperanza matemática de suma de cuadrados de distancias ortogonales y varianza de suma de cuadrados de distancias ortogonales, se recurrirá a las bases de la estadística. [8] Canavos G.C. Define los momentos de variables aleatorias como los valores esperados de ciertas funciones de X.

Coeficiente de Correlación de Pearson

En el desarrollo del proyecto es de suma importancia la interpretación estadística, matemática y geométrica del coeficiente de correlación de Pearson, el valor de ese resultado será uno de los aspectos que se necesitan para interpretar las diferencias entre la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) y la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO), en general ese resultado se aplicará durante el estudio de todos los temas incluidos en el proyecto, en [9] Keney, J.F. and Keeping E. S, se encuentra no solo la definición del cociente entre la covarianza de las dos variables y el producto de las desviaciones estándar sino también toda la interpretación geométrica resultante de la consideración que los valores de cada variable forman parte de un vector y el coeficiente de Pearson es el coseno del ángulo α comprendido entre ellos.

Coeficiente de Determinación.

[8] Canavos G.C. entrega la expresión de Coeficiente de Determinación que se necesita en el trabajo para los cotejos entre las regresiones estudiadas:

$R^2 = 1 - SCE/SCT$

Varianza e Intervalos de Confianza para los parámetros de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales.

En este estudio se realizará una comparación entre las varianzas y los intervalos de confianza del parámetro de pendiente entre la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales y la Recta de Mínimos Cuadrados Tradicional.

[21] Minitab Suport en “Methods and formulas for Orthogonal Regressión” entrega las expresiones para lograr lo pertinente.

Denomina:

$$m_{xx} = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2$$

$$m_{yy} = \frac{1}{n-1}\sum(y_i - \bar{y})^2$$

$$m_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{x})$$

$$\hat{\sigma_u}^2 = \frac{m_{yy} + m_{xx} - \sqrt{(m_{yy} - m_{xx})^2 + 4m_{xy}^2}}{2}$$

$$\hat{\sigma}_{xx} = \frac{\sqrt{(m_{yy} - m_{xx})^2 + 4m_{xy}^2} - (m_{yy} - m_{xx})}{2}$$

$$S_{vv} = \frac{(n-1)\left(1 + \hat{\beta}_1^2\right)\hat{\sigma}_u^2}{n-2}$$

$$\hat{V}\left(\hat{\beta}_1\right) = \frac{\hat{\sigma}_{xx}.S_{vv} + \hat{\sigma}_u^2.S_{vv} - \hat{\beta_1^2}.\hat{\sigma}_u^4}{(n-1)\,\hat{\sigma}_{xx}^2}$$

Establece que para el parámetro de pendiente el intervalo de confianza es:

$$\hat{\beta}_1 \pm Z_{(1-\alpha/2)}\sqrt{\hat{V}\left(\beta_1\right)}$$

Por su parte, indica que para el parámetro de intercepto el intervalo de confianza es:

$$\hat{\beta}_0 \pm Z_{(1-\alpha/2)}\sqrt{\hat{V}\left(\beta_0\right)}$$

Donde:

$$\hat{V}\left(\beta_0\right) = \frac{S_{vv}}{n} + \bar{x}.\hat{V}\left(\beta_1\right)$$

Relación de Varianzas.

En [11] Deming define la relación de varianzas de errores para la regresión que lleva su nombre de la siguiente manera:

$$\delta = \sigma_y^2/\sigma_x^2$$

En el caso de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO):

$$\delta = 1$$

Si se elige la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) se considera:

$$\delta = \frac{\sigma_y^2}{0}$$

$$\delta \to \infty$$

Si se escoge la Recta de Mínimos Cuadrados Horizontales se considera:

$$\delta = 0/\sigma_x^2$$

$$\delta = 0$$

Para valores de δ distintos a los descritos, los residuales deben considerarse oblicuos.

Estas relaciones de varianzas también las consideran: [24] Yaakov (J) Stein y [25] I. Markovsky and S. Van Huffel.

Regresión euclidiana bidimensional

[24] Yaakov (J) Stein considera que cuando las varianzas de los errores para las dos variables son iguales, el residual para cada punto será la menor distancia al lugar

geométrico de regresión sin importar que sea una recta o una curva en el plano. En el caso que se trate de una curva, la dirección de los residuales, debe ser para cada punto perpendicular a la recta tangente a la curva. Este importante concepto, amplia el espectro de inclinaciones de los vectores residuales y prácticamente admite que estos pueden tener cualquier pendiente.

Inconvenientes en el empleo de la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) (Tradicionales u ordinarios).

[26] Cornbleet PJ, Gochman N. Demuestran que hay dos circunstancias que causan incorrectos parámetros cuando se determinan rectas de regresión recurriendo a la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV). El primero es no considerar las varianzas en los errores de la variable independiente y el segundo es la inclusión de valores atípicos, afirmando que la regresión de Deming, que incluye preferentemente la Regresión Ortogonal es el método más útil. Afirman que hay un error significativo en la estimación tradicional de la pendiente cuando la relación entre la desviación estándar de un valor de x y la desviación estándar de los valores de x excede a 0,2. Concluyen también que el efecto indeseable de los datos atípicos se evita omitiendo aquellas observaciones en las cuales su error exceda a 4 veces el error estándar de la regresión.

Estudios comparativos entre regresiones empleando Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) y Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO).

Existen estudios comparativos a favor de la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) pero todos referidos a fenómenos particulares de la ciencia, la economía y el comportamiento social. Ninguno de ellos crea teorización general y son válidos única y exclusivamente para el comportamiento abordado de acuerdo a los datos observados. Si bien dichas investigaciones se constituyen en un fuerte indicio de las ventajas de la regresión ortogonal, se requiere un estudio que sea aplicable a todos los casos en los cuales la relación de varianzas entre los errores de las dos variables tenga el valor de 1.

Por esta falencia, el presente trabajo es general y aborda el cotejo entre las dos regresiones propuestas para todas las circunstancias posibles.

Entre dichos estudios se destacan:

[22] Richard L. Branham Jr. :"Orthogonal Regression in Astronomy" con el uso de la regresión ortogonal estima los parámetros de la cinemática galáctica y la corrección diferencial de una órbita planetaria, los resultados mediante el método de mínimos cuadrados ortogonales son superiores al de los mínimos cuadrados verticales.

[23] Khajehsharifi, H.; Sadeghi, M.; Pourbasheer, E. En su trabajo de espectrofotometría para modelar mezclas de ceratina, creatinina y ácido úrico mediante regresión ortogonal, concluyen que el modelamiento ortogonal tiene mejores cuadrados medios de error que el método de mínimos cuadrados verticales (ordinarios o tradicionales).

[27] Taliha Keles. Realizó un trabajo titulado: Comparación de mínimos cuadrados clásicos y regresión ortogonal en modelos de error de medición. Usó como variables el

resultado de puntajes para acceder a la secundaria de un grupo de estudiantes y el puntaje en la resolución de problemas de matemáticas no convencionales en el grado octavo en las escuelas de las ciudades de Osmangazi, Yildirim y Nilüfer. El resultado fue que al Emplear la Recta de Mínimo Cuadrados Ortogonales (RMCO) se obtuvo una desviación estándar de los errores inferior a la encontrada cuando se recurrió a la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV).

[28] Sandra Donevska, Eva Fiserova, Karel Hron. Adelantaron el trabajo denominado: Equivalencia entre el modelo ortogonal y el modelo lineal. Relacionaron dos variables: La longitud circunferencia de la cadera y la longitud de la circunferencia en el tórax en seres humanos. En este estudio muy particular la conclusión fue que los parámetros obtenidos en las dos regresiones no se diferenciaban significativamente.

[29] Rainer Haeckel, Werner Wosniok and Rainer Klauke. Desarrollaron la investigación denominada: Comparación de regresión lineal ordinaria, regresión ortogonal, análisis de componente principal estandarizado y enfoque Deming para la validación de métodos en laboratorio de medicina de laboratorio. Se trabajó sobre 5000 muestras bivariadas cada una de 100 elementos, concluyendo que la regresión ortogonal lineal bivariada es superior a la regresión lineal tradicional, pero que la ventaja sobre cualquier método la tiene la regresión de Deming. Esto significa que deben tenerse en cuenta las varianzas de los errores en las dos variables, si esas varianzas son iguales, será ideal la regresión mediante la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales, en caso de otra razón de varianza es preferible la regresión de Deming. Otra decisión en la escogencia del modelo requiere restricciones con respecto a rango de medición y un estudio de datos atípicos.

Aguja de Buffon

Al final del proyecto y sin ser el objetivo del mismo, se aprovecha la destreza adquirida con el manejo de la suma de cuadrados de distancias ortogonales a rectas que pasan por el centro geométrico de un conjunto de puntos para plantear un problema que denominamos “Novedosa Aguja de Buffon”. Se trata de usar una recta que pasa por el citado centro geométrico y luego hacerla rotar aleatoriamente sobre el mismo, en cada ensayo se calculará la suma de cuadrados de distancias ortogonales de los puntos a la recta y con fundamento en que la probabilidad que esa suma sea menor a una suma de cuadrados de distancias ortogonales que se determinará en el proyecto, y superior a una suma de cuadrados de distancia ortogonales mínima, calcular el número π. Para ello es necesario conocer la versión original de la “Aguja de Buffon”. En [10] Murray y Spiegel proponen dos versiones y las respectivas soluciones. La primera versión es la siguiente: Un piso tiene líneas paralelas a distancias iguales l entre sí, una aguja de longitud $a < l$ cae al piso. Hallar la probabilidad de que la aguja toque alguna paralela. La solución es: $2a / (l.\pi)$. La segunda versión llamada Buffon – Laplace dice que la aguja cae sobre una cuadricula de lado l: La solución es: $a (4l - a) / (\pi. l^2)$.

CAPÍTULO 2

RECTA DE MÍNIMOS CUADRADOS ORTOGONALES

2.1. Hiperplano de Mínimos Cuadrados.

Para determinar el Hiperplano de los Mínimos Cuadrados se desarrolla el siguiente proceso:

a.- Se considera la ecuación de un hiperplano y un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^m$.

b.- Se establece la distancia euclidiana de uno de esos puntos i al hiperplano.

c.- Se expresa el cuadrado de dicha distancia.

d.- Se efectúa la suma de todas las distancias cuadradas.

f.- Una vez obtenida la expresión de la suma de cuadrados de distancias se recurre al cálculo diferencial para obtener la mínima suma.

g.- Inicialmente se deriva parcialmente la suma con respecto al parámetro "a" y se iguala a cero, con el objeto de encontrar puntos críticos.

h.- Este procedimiento es suficiente para encontrar el valor de parámetro "a" y demostrar que en los puntos críticos de la suma, la recta pasará por el centroide del conjunto de los puntos. (Ver desarrollo)

i.- El reemplazo del valor del parámetro "a" en la expresión de la suma de cuadrados de distancias ortogonales y el trabajo sobre dicha expresión, entrega un resultado en función de varianzas y covarianzas de las variables y del resto de los parámetros del hiperplano.

j.- En la expresión de suma de cuadrados de distancias se deriva parcialmente con respecto a todos los parámetros, y esos resultados se igualan a cero, lográndose un conjunto de m ecuaciones y con igual número de incógnitas. Encontrándose puntos críticos para la suma. Para definir si se trata de un máximo o un mínimo se aplicaran las segundas derivadas y se recurrirán a los criterios establecidos por el cálculo diferencial.

k.- Las expresiones resultantes de los procedimientos descritos en los literales anteriores son extensas, pero pueden simplificarse enormemente recurriendo a las herramientas que ofrece el álgebra lineal. Por lo tanto las fórmulas establecidas se pueden expresar en forma matricial y vectorial.

Para determinar la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales se procede de la siguiente manera:

a.- Se obtendrá la recta en $\mathbb{R}^2$ realizando una particularización de las expresiones determinadas para el Hiperplano de los Mínimos Cuadrados. En este caso solo se tendrán dos parámetros el de corte "a" y el de pendiente "b".

b.- En el caso de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales, las expresiones matriciales y vectoriales planteadas experimentan una notable simplificación y rápidamente se llega a los parámetros que corresponden a dos puntos críticos de suma de cuadrados, ambos puntos críticos conteniendo un mismo valor del parámetro de corte cuya expresión directamente indica que las rectas obtenidas pasan por el centroide de los puntos.

c.- El parámetro b tendrá dos valores, uno para cada punto crítico.

d.- El criterio de la segunda derivada definirá que uno de los dos valores de pendiente corresponde a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales y el otro a la Recta de Máximos Cuadrados Ortogonales.

Desarrollo

Se llamará Hiperplano de los Mínimos Cuadrados a aquella función lineal en $\mathbb{R}^m$ de la forma:

$$b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_mx_m + a = 0$$

Que existiendo n puntos de coordenadas:

$$P_i = (x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{mi}) \qquad i = 1, .., n$$

La suma de los cuadrados de las "Distancias Euclídeas" de los puntos a la función lineal, es mínima.

La distancia de un punto i al hiperplano será:

$$\frac{|b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + ... + b_mx_{mi} + a|}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_m^2}}$$

El cuadrado de dicha distancia podrá expresarse así:

$$\frac{(b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + ... + b_mx_{mi} + a)^2}{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_m^2}$$

La suma de los cuadrados de todos los puntos al hiperplano tendrá la forma:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + ... + b_mx_{mi} + a)^2}{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_m^2} \right)$$

Se buscará que la suma de los cuadrados de las distancias sea mínima.

Inicialmente se deriva con respecto al parámetro a y se iguala a cero.

$$\frac{\delta S}{\delta a} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + \ldots + b_mx_{mi} + a}{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_m^2}\right) = 0$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{\delta S}{\delta a} = 2(\frac{b_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_2\sum_{i=1}^{n} x_{2i} + \ldots + b_m\sum_{i=1}^{n} x_{mi} + na}{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_m^2}) = 0$$

De la expresión anterior se despeja a:

$$a = -b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2 - \ldots - b_m\bar{x}_m$$

Lo anterior significa que todos los valores críticos de suma de cuadrados de distancias corresponden a un hiperplano que pasa por:

$$P(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots\bar{x}_m)$$

Si se reemplaza el valor de a en la expresión de la suma de los cuadrados de las distancias se obtiene:

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(b_1(x_{1i} - \bar{x}_1) + b_2(x_{2i} - \bar{x}_2) + \ldots + b_m(x_{mi} - \bar{x}_m))^2}{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_m^2}\right)$$

Realizando algunas operaciones y llamando “V” a la varianza y “Cov” a la covarianza se llega a:

$$S = n\left(\frac{b_1^2.V\,(x_1) + b_2^2.V\,(x_2) + \ldots + b_m^2.V\,(x_m) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}(b_jb_k.Cov(x_j, x_k))_{(j\neq k)}}{b_1^2 + b_2^2 + \ldots b_m^2}\right)$$

Que en forma contraída puede expresarse como:

$$S = n\left(\frac{\sum_{j=1}^{m}\left(b_j^2.V(x_j)\right) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} b_jb_k.Cov(x_j, x_k)_{(j\neq k)}}{\sum_{j=1}^{m} b_j^2}\right)$$

En la anterior expresión se deriva parcialmente la suma de cuadrados de distancias al Hiperplano de Mínimos Cuadrados Ortogonales con respecto a cada una de los parámetros b, esas derivadas se igualarán a cero obteniéndose un sistema de m ecuaciones con m incógnitas, el sistema se resolverá y posteriormente se aplicarán los criterios de segundas derivadas para definir que valores de parámetros corresponden efectivamente al Hiperplano de los Mínimos cuadrados Ortogonales.

$$\begin{bmatrix} \delta S/\delta b_1 \\ \delta S/\delta b_2 \\ . \\ . \\ . \\ \delta S/\delta b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema puede simplificarse a uno de m-1 incógnitas con m-1 ecuaciones si se hace cualquiera de los valores de b igual a 1 o -1:

Una manera de expresar los resultados anteriores en forma matricial es la siguiente: Llámese **A** la matriz de covarianzas de todas las x_i, sea **b** el vector columna de los parámetros b_i, sea $\bar{X}$ el vector columna de las medias de todas las variables.

$$a = -\mathbf{b}^{\mathbf{t}}.\bar{X}$$

$$S = n\frac{\mathbf{b}^{\mathbf{t}}.\mathbf{A}.\mathbf{b}}{\mathbf{b}^{\mathbf{t}}.\mathbf{b}}$$

Al derivar la suma de los cuadrados con respecto a cualquier parámetro b_r e igualar a cero se obtendrá:

$$\left(-b_r^2 + \sum_{j=1}^{m}(b_j^2)_{(j\neq r)}\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\left(b_j.Cov\left(x_r,x_j\right)\right)_{(j\neq r)}\right)$$

$$+b_r\left(V(x_r)\sum_{j=1}^{m}\left(b_j^2\right)_{(j\neq r)} - \sum_{j=1}^{m}\left(b_j^2V\left(x_j\right)\right)_{(j\neq r)} - \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left(b_jb_k.Cov\left(x_j,x_k\right)_{(j\neq k, j\neq r, k\neq r)}\right)\right) = 0$$

$$r = 1,...,m$$

Llámese:

b* al vector columna de los parámetros b, excluido b_r.
A*a la matriz de covarianzas excluido x_r
C Al vector columna de covarianzas $Cov(x_r,x_j)_{(r\neq j)}$

La forma vectorial de expresar el resultado de cada derivada parcial igualada a cero para obtener el sistema m x m de ecuaciones a partir de las cuales se obtendrá la suma de distancias mínimas cuadradas Euclídeas al “Hiperplano de los Mínimos Cuadrados Ortogonales “será:

$(-{b_r}^2 + \mathbf{b}^{*t} . \mathbf{b}^{*})$ $(\mathbf{b}^{*t}. \mathbf{C}) + b_r(V(x_r). \mathbf{b}^{*t}. \mathbf{b}^{*} - \mathbf{b}^{*t}. \mathbf{A}^{*}. \mathbf{b}^{*}) =0$

2.2. Parámetros de la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales

El primero de los “Hiperplanos de los Mínimos Cuadrados, es la” Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales”. Se encuentra la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales como particularización del Hiperplano de los Mínimos Cuadrados Ortogonales.

La forma de la Recta de Los Mínimos Cuadrados ortogonales de acuerdo a la teoría desarrollada es:

$$b_1x_1 + b_2x_2 + a = 0$$

Se puede hacer en este caso:

$$y = x_1$$
$$x = x_2$$
$$b = b_2$$

Tomando la recta la forma:

$$-y + bx + a = 0$$

Parámetro de corte con el eje “Y”:

$$a = - \mathbf{b}^t. \bar{X}$$
$$a = - \begin{bmatrix} -1 & b \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{x} \end{bmatrix}$$
$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

Parámetro de pendiente

Para este caso:

$$b_r = b$$

A =

$$\begin{bmatrix} V(y) & Cov\,(x,y) \\ Cov\,(x,y) & V\,(x) \end{bmatrix}$$

b =

$$\begin{bmatrix} -1 \\ b \end{bmatrix}$$

A*= $\begin{bmatrix} V\,(y) \end{bmatrix}$

b* = $\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$

C = $\begin{bmatrix} Cov\,(x,y) \end{bmatrix}$

Reemplazando: en la expresión obtenida para la derivada parcial con respecto a b_2:

$$\left(-b^2+(-1)\,(-1)\right)(-1.Cov\,(x,y))+b\,(V\,(x)\,(-1)\,(-1)-(-1)\,V\,(y)\,(-1))=0$$

Realizando reducciones:

$$b^2.Cov(x,y)+b\,(V(x)-V(y))-Cov(x,y)=0$$

Ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

$$b=\frac{-(V(x)-V(y))\pm\sqrt{(V(x)-V(y))^2+4\,(Cov(x,y))^2}}{2.Cov(x,y)}$$

$$a=\bar{y}-b\bar{x}$$

Se determina a continuación si esos valores críticos corresponden a máximos o mínimos:

Se retoma la expresión vectorial para la suma de distancias cuadradas al hiperplano, en este caso a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales.

$$S=n\frac{\mathbf{b^t.A.b}}{\mathbf{b^t.b}}$$

En este caso:

$$S = n\frac{\begin{bmatrix}-1 & b\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}V\left(y\right) & Cov\left(x,y\right)\\ Cov\left(x,y\right) & V\left(x\right)\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-1\\ b\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}-1 & b\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-1\\ b\end{bmatrix}}$$

$$S = n\left(\frac{b^2.V\left(x\right) - 2b.Cov(x,y) + V(y)}{b^2+1}\right)$$

Sobre esta expresión se hallará la segunda derivada que aplicada sobre la solución:

$$b = \frac{-\left(V(x)-V(y)\right) + \sqrt{(V(x)-V(y))^2 + 4\left(Cov(x,y)\right)^2}}{2.Cov(x,y)}$$

Se obtiene:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta b^2} = \frac{2n\sqrt{\left(V\left(x\right)-V\left(y\right)\right)^2 + 4\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2}}{\left(1+b^2\right)^2} > 0$$

.
Por lo tanto, para la solución dada la suma de distancias ortogonales cuadradas a la recta a la recta es Mínima. Siempre y cuando se cumplan las dos condiciones siguientes:

$V\left(x\right) \neq V\left(y\right)$ y $Cov\left(x,y\right) \neq 0$

Se ha encontrado la “Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales”. (RMCO)

Definición de Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO): Es aquella recta tal que la suma de cuadrados de distancias ortogonales de un conjunto de puntos a ella es mínima.

2.3. Recta de Máximos Cuadrados Ortogonales.

Si a la expresión de suma de cuadrados de distancias se le encuentra la segunda derivada y a ese resultado se le aplica el valor de la pendiente:

$$b = \frac{-\left(V(x)-V(y)\right) - \sqrt{(V(x)-V(y))^2 + 4\left(Cov(x,y)\right)^2}}{2.Cov(x,y)}$$

Se obtiene:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta b^2} = -\frac{2n\sqrt{\left(V\left(x\right)-V\left(y\right)\right)^2+4\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2}}{\left(1+b^2\right)^2} < 0$$

Lo anterior significa que, para esta segunda solución, la segunda derivada es menor que cero y por lo tanto la suma de los cuadrados de la distancia es máxima, siempre y cuando se cumplan las condiciones siguientes:

$V\left(x\right) \neq V\left(y\right)$ y $Cov\left(x,y\right) \neq 0$

Se ha encontrado el parámetro de pendiente para la "Recta de los Máximos Cuadrados Ortogonales".

El parámetro de corte será:

$a = \bar{y} - b\bar{x}$

Definición de Recta de los Máximos Cuadrados Ortogonales: Es aquella recta que, pasando por el centroide de un conjunto de puntos, la suma de los cuadrados de las distancias ortogonales de dichos puntos a ella, es máxima.

2.4. Particularidades de la pendiente de la Recta de Los Mínimos Cuadrados Ortogonales.

1) En general y luego de realizar la determinación del parámetro de pendiente "b" en los puntos críticos se obtienen dos valores:

$$b = \frac{-(V(x)-V(y)) \pm \sqrt{(V(x)-V(y))^2+4\left(Cov(x,y)\right)^2}}{2.Cov(x,y)}$$

El valor de la pendiente "b" que tiene el signo más precediendo al radical del numerador corresponde a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales. Por su parte el valor de la pendiente "b" que tiene el signo menos precediendo a radical del numerador corresponde a la Recta de Máximos Cuadrados Ortogonales.

En el caso particular en que la covarianza entre x, y sea cero, la determinación de la pendiente b se logra, aplicando en los casos pertinentes límites en funciones indeterminadas:

Condición:	Recta Mín. Cuadrados. Ort.	Recta Máx Cuadrados. Ort
$V(x) > V(y)$	$b = 0$	$b \to -\infty$ si $Cov(x,y) \to 0^+$ $b \to \infty$ si $Cov(x,y) \to 0^-$
$V(x) < V(y)$	$b \to \infty$ si $Cov(x,y) \to 0^+$ $b \to -\infty$ si $Cov(x,y) \to 0^-$	$b = 0$

2) Cuando la covarianza entre las dos variables es diferente de cero, de los dos valores de b obtenidos, aquel que corresponde a la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales, es aquel que tiene el mismo signo del coeficiente de correlación entre x e y. El otro valor de b, corresponde a la Recta de los Máximos Cuadrados Ortogonales.

3) En el caso muy particular en que las varianzas de las dos variables sean iguales y que la covarianza entre ellas sea cero. La expresión de suma de cuadrados de distancias ortogonales se convierte en:

$$S = n.V(x)$$

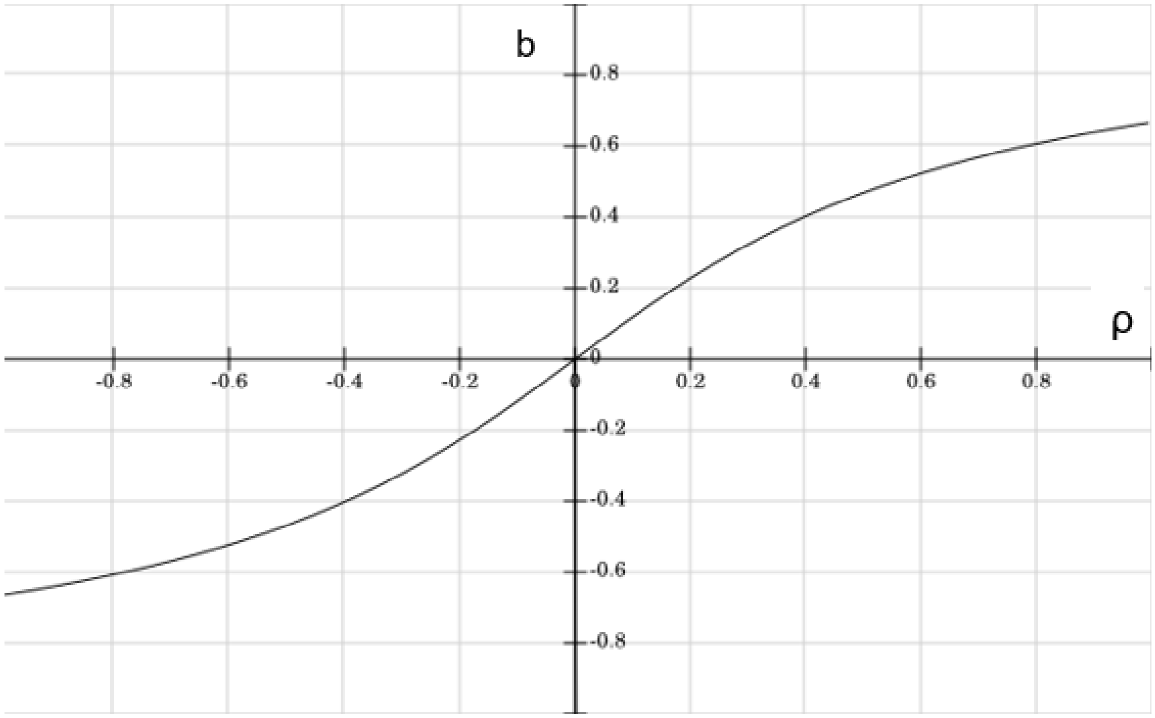
Es decir que es constante para todas las rectas que pasan por el centroide de los puntos sin importar su pendiente "b", es obvio que no existirá Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales ni Recta de Máximos Cuadrados Ortogonales.

4) Cuando los coeficientes de correlación tengan valor de 1 y de -1, los valores de b para la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales son respectivamente:

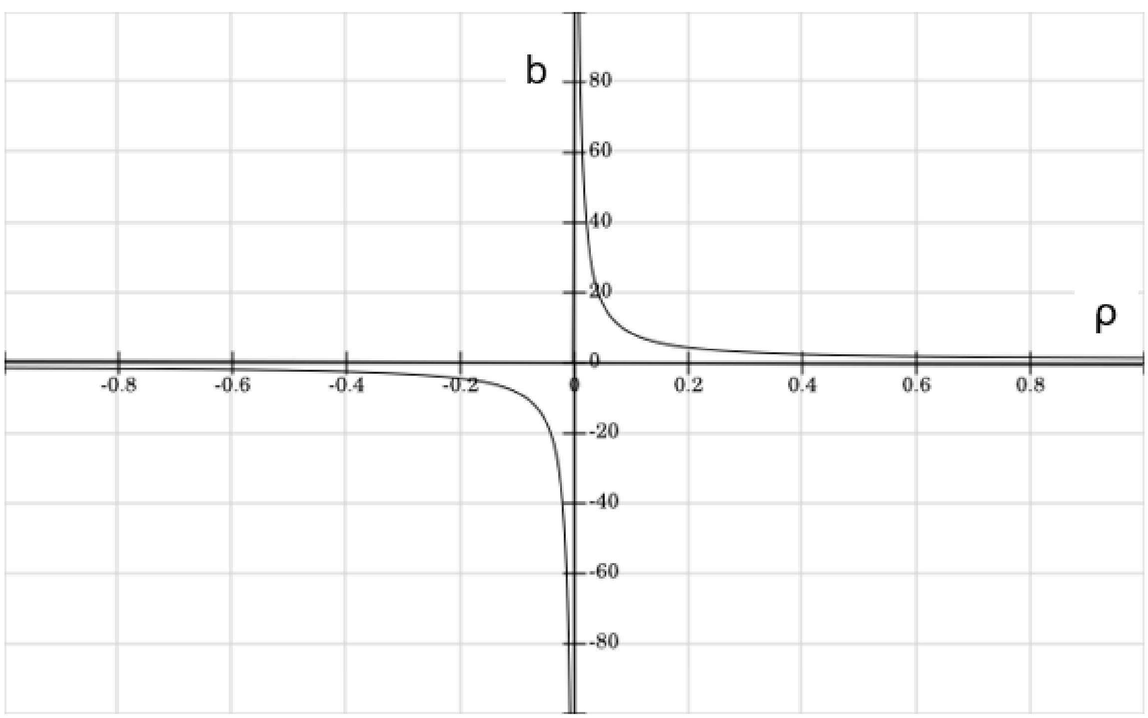
$$V(y)/V(x), \quad -V(y)/V(x)$$

5) Cuando las varianzas de x e y son iguales, en la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales, los valores de b son 1 cuando la covarianza es positiva y -1 cuando la covarianza es negativa.

6) En los casos en que las varianzas no son iguales los lugares geométricos que relacionan pendiente como función de coeficiente de correlación son diferentes dependiendo de si V(x)> V(y) o si V(y) > V(x). A continuación, se grafican las dos situaciones.



Grafica 1.Valores de pendiente para la Recta de los Mínimos Cuadrados ortogonales, en función del coeficiente de correlación cuando V(x) > V(y), en este caso en particular: V(x) = 9, V(y) =4.



Grafica 2. Valores de pendiente para la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales, en función del coeficiente de correlación cuando V(x) < V(y), en este caso en particular: V(x) =4, V(y) =9.

2.5. Otras rectas notables

A continuación, se estudiarán dos rectas notables que, pasando por el centroide de un conjunto de puntos, son definidas a partir de la suma de cuadrados de distancias ortogonales.

Recta de suma de cuadrados de distancias ortogonales promedio igual a V(x) (Diferente a la solución obvia b= ∞)

La suma de distancias cuadradas ortogonales a una recta que pasa por el centroide se dedujo en 2.2 y es la siguiente

$$S = n\left(\frac{b^2.V\,(x) - 2b.Cov(x,y) + V(y)}{b^2+1}\right)$$

Igualando a n veces la varianza de x:

$$n\left(\frac{b^2.V\,(x) - 2b.Cov\,(x,y) + V\,(y)}{b^2+1}\right) = n.V\,(x)$$

Despejando b:

$$b = -\frac{V(x) - V(y)}{2Cov(x,y))}$$

Como la recta pasa por el centroide del conjunto de puntos:

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

Se han encontrado los parámetros para la recta cuya suma promedia de cuadrados de distancias ortogonales medidas a partir de un conjunto de puntos es igual a la varianza de x.

Recta de suma de cuadrados de distancias ortogonales promedio igual a V(y). (Diferente a la solución obvia b = 0)

$$n\left(\frac{b^2.V\,(x) - 2b.Cov\,(x,y) + V\,(y)}{b^2+1}\right) = n.V\,(y)$$

Despejando b:

$$b = \frac{2.Cov\,(x,y)}{V\,(x) - V\,(y)}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

2.6. Propiedades y relaciones de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales.

Se establecen propiedades de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) y relaciones con otras rectas notables.

Propiedad de perpendicularidad.

La Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) y la Recta de los Maximos Cuadrados Ortogonales son perpendiculares entre si.

Demostración.

Considérese la pendiente de la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO):

$$b_1 = \frac{-\left(V\left(x\right) - V\left(y\right)\right) + \sqrt{\left(V\left(x\right) - V\left(y\right)\right)^2 + 4\left(Cov\left(x, y\right)\right)^2}}{2.Cov\left(x, y\right)}$$

Considérese ahora la pendiente de la Recta de los Máximos Cuadrados Ortogonales:

$$b_2 = \frac{-\left(V\left(x\right) - V\left(y\right)\right) - \sqrt{\left(V\left(x\right) - V\left(y\right)\right)^2 + 4\left(Cov\left(x, y\right)\right)^2}}{2.Cov\left(x, y\right)}$$

$$b_1.b_2 = \left(\frac{-\left(V\left(x\right) - V\left(y\right)\right) + \sqrt{\left(V\left(x\right) - V\left(y\right)\right)^2 + 4\left(Cov\left(x, y\right)\right)^2}}{2.Cov\left(x, y\right)}\right) \cdot \left(\frac{-\left(V\left(x\right) - V\left(y\right)\right) - \sqrt{\left(V\left(x\right) - V\left(y\right)\right)^2 + 4\left(Cov\left(x, y\right)\right)^2}}{2.Cov\left(x, y\right)}\right)$$

$$b_1.b_2 = -1$$

Propiedad de la suma de distancias ortogonales a la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO).

La suma de las distancias ortogonales de los puntos que quedan por arriba de la Recta de los Mínimos cuadrados es igual a la suma de las distancias de las distancias ortogonales de los puntos que quedan por debajo de la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales.

Considérese la expresión de la distancia (d) ortogonal de un punto a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales:

La Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales es:

$$y = a + bx$$

Y el punto:

$$P_i(x_i, y_i)$$

$$d = \frac{|bx_i - y_i + a|}{\sqrt{b^2+1}}$$

Pero:

$$\hat{y}_i = a + bx_i$$

$$d = \frac{|\hat{y}_i - y_i|}{\sqrt{b^2+1}}$$

Nótese que para los puntos por encima de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales:

$$\hat{y}_i - y_i < 0$$

Y para los puntos por debajo de a Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales:

$$\hat{y}_i - y_i > 0$$

Si en las distancias se prescinde del valor absoluto, resultara que las expresiones para los puntos superiores sera negativa y para los puntos inferiores será negativa. Si la suma de todas las expresiones resultantes es cero, quedará probado que la suma de distancias ortogonales de los puntos por situados porencima de la recta es igual a la suma de las distancias ortogonales de los puntos que están por debajo de dicha recta.

Llámese z a la suma de todas las distancias (prescindiendo de valor absoluto):

$$z = \sum \frac{bx_i - y_i + a}{\sqrt{b^2+1}}$$

$$z = \frac{b\sum x_i - \sum y_i + na}{\sqrt{b^2+1}}$$

$$z = \frac{n\left(b\bar{x} - \bar{y} + a\right)}{\sqrt{b^2+1}}$$

Pero:

$$b\bar{x} - \bar{y} + a = 0$$

Por lo tanto:

$$z = 0$$

Propiedad de la suma de distancias verticales a la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales.

La Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) , al igual que todas las rectas que pasan por $p(\bar{x},\bar{y})$ cumplen con la siguiente propiedad: La suma de las distancias verticales (teniendo en cuenta sus signos) de los puntos a la recta es cero.

$$\sum(y_i-\hat{y}_i)=0$$

Demostración:

$$y_i-\hat{y}_i=y_i-bx_i-a$$

$$\sum(y_i-\hat{y}_i)=\sum y_i-b\sum x_i-na=n(\bar{y}-b\bar{x}-a)=0$$

Propiedad de la suma de distancias horizontales a la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales.

La Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO), al igual que todas las rectas que pasan por $p(\bar{x},\bar{y})$ cumplen con la siguiente propiedad: La suma de las distancias horizontales (teniendo en cuenta sus signos) de los puntos a la recta es cero.

$$\sum(x_i-\hat{x}_i)=0$$

Demostración:

$$\hat{x}_i=\frac{y_i-a}{b}$$

$$\sum(x_i-\hat{x}_i)=\sum\left(x_i-\frac{y_i-a}{b}\right)=\sum\left(\frac{bx_i-y_i+a}{b}\right)=\frac{n(b\bar{x}-\bar{y}+a)}{b}$$

$$=0$$

Relación entre la pendiente de la Recta de cuadrados de distancias ortogonales promedia igual a V(x) con las Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) y la Recta de los Máximos Cuadrados Ortogonales.

La pendiente de la recta de cuadrados de distancias ortogonales promedia igual a V(x) es igual a la media de las pendientes de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales y la Recta de los Máximos Cuadrados Ortogonales.

Efectivamente:

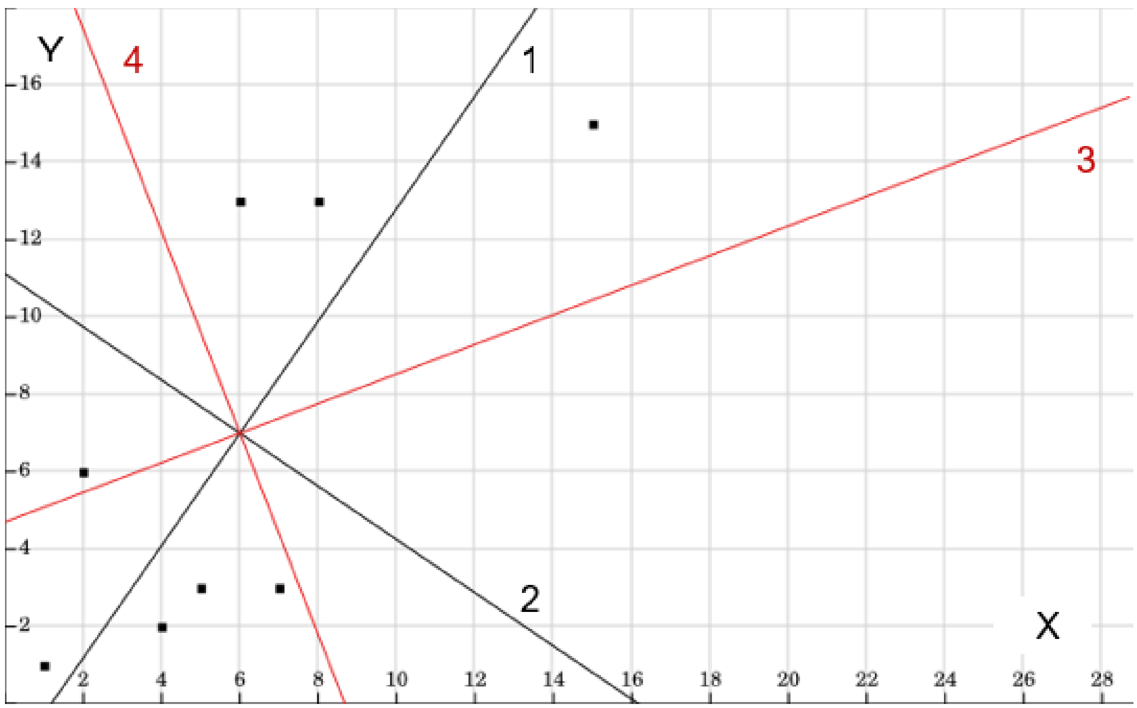
$$-\frac{V(x)-V(y)}{2.Cov(x,y)}=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{-(V(x)-V(y))+\sqrt{(V(x)-V(y))^2+4(Cov(x,y))^2}}{2.Cov(x,y))}+\frac{-(V(x)-V(y))-\sqrt{(V(x)-V(y))^2+4(Cov(x,y))^2}}{2.Cov(x,y)}\right)$$

Perpendicularidad entre la recta de suma de cuadrados de distancias ortogonales promedia igual a V(x) y la recta de suma de cuadrados de distancias ortogonales promedia igual a V(y).

$$\left(-\frac{V(x)-V(y)}{2.Cov(x,y)}\right)\left(\frac{2.Cov(x,y)}{V(x)-V(y)}\right) = -1$$

Grafica ejemplo que Contiene: Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO), Recta de Máximos Cuadrados Ortogonales, Rectas de distancias cuadradas ortogonales promedias igual a V(x) y V(y).



Grafica 3.Comparación Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales, Recta de Máximos Cuadrados Ortogonales, Recta de Distancias Cuadradas Ortogonales Promedia igual a V(x), Recta de Distancias Cuadradas Ortogonales igual a V(y). Para el conjunto de Puntos: (1,1); (2,6); (4,2); (5,3); (6,13); (7,3); (8,13); (15,15). Se han representado:

Número 1 Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales. y = -1.7215 +1.4536 x.

Número 2 Recta de los Máximos Cuadrados Ortogonales. y = 11.1277 – 0,6879 x.

Número 3 Recta de distancias cuadradas ortogonales promedia igual a V(x). y = 4.7029 + 0.3829 x.

Número 4 Recta de distancias cuadradas ortogonales promedia igual a V(y). y = 22.6719 -2.612 x.

Otras consideraciones.

La recta de distancias ortogonales promedia igual a V(x) tiene otra solución obvia que simplemente se nombrará en el presente estudio. La recta de pendiente infinito que pasa por el centroide de los puntos.

La recta de distancias ortogonales promedia igual a V(y) tiene otra solución obvia que simplemente se nombrará en el presente estudio. La recta de pendiente cero que pasa por el centroide de los puntos.

CAPÍTULO 3

DIFERENCIAS ANGULARES

3.1. Diferencias angulares entre la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) y la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV).

Se sabe que la Recta de los Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) tiene por pendiente:

$$b = \frac{Cov\left(x,y\right)}{V\left(x\right)}$$

La diferencia de ángulos será:

$$arc.tg\left(\frac{-\left(V\left(x\right)-V\left(y\right)\right)+\sqrt{\left(V\left(x\right)-V\left(y\right)\right)^{2}+4\left(Cov\left(x,y\right)\right)^{2}}}{2.Cov\left(x,y\right)}\right)-arc.tg\left(\frac{Cov\left(x,y\right)}{V\left(x\right)}\right)$$

En el caso particular en el cual

$$\rho = 1$$

Los dos ángulos son iguales como se demuestra a continuación:

Bajo ese valor de coeficiente de correlación:

$$Cov(x,y) = \sqrt{V\left(x\right)V\left(y\right)}$$

Reemplazando y realizando algunas reducciones se llega a la siguiente diferencia:

$$arc.tg\left(\sqrt{\frac{V\left(y\right)}{V\left(x\right)}}\right)-arc.tg\left(\sqrt{\frac{V\left(y\right)}{V\left(x\right)}}\right)=0$$

Bajo esta circunstancia no hay diferencia de ángulo.

En el caso particular en que:

$$\rho = -1$$

$$Cov\left(x,y\right) = -\sqrt{V\left(x\right).V\left(y\right)}$$

Reemplazando y realizando algunas reducciones se llega a la siguiente diferencia:

$$arc.tg\left(-\frac{V\left(y\right)}{V\left(x\right)}\right)-arc.tg\left(-\frac{V\left(y\right)}{V\left(x\right)}\right)=0$$

Bajo esta circunstancia no hay diferencia de ángulo.

Lo anteriormente expresado era de esperarse puesto que el conjunto de puntos, bajo la condición de los coeficientes de correlación son colineales.

Diferencias angulares máximas y mínimas entre la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) y la Recta de los Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) en función del coeficiente de correlación cuando V(x) > =V(y).

$$Cov\left(x,y\right)=\rho\sqrt{V\left(x\right)V\left(y\right)}$$

Reemplazando en la diferencia de ángulos:

$$arc.tg\left(\frac{-\left(V\left(x\right)-V\left(y\right)\right)+\sqrt{\left(V\left(x\right)-V\left(y\right)\right)^{2}+4\rho^{2}V\left(x\right)V\left(y\right)}}{2\rho\sqrt{V\left(x\right)V\left(y\right)}}\right)-arc.tg\left(\frac{\rho\sqrt{V\left(x\right)V\left(y\right)}}{V\left(x\right)}\right)$$

Si se deriva la expresión con respecto a ρ , se iguala a cero y luego se despeja dicho coeficiente, obteniéndose los siguientes puntos críticos:

$$\rho=\pm\sqrt{\frac{V\left(x\right)-V\left(y\right)}{3V\left(x\right)+V\left(y\right)}}$$

El criterio de la segunda derivada, demostrará que el signo positivo del coeficiente de correlación obtenido corresponde un máximo relativo y el signo negativo corresponde a un mínimo relativo.

Nótese que solo existirán máximo relativo y mínimo relativo cuando:

$V(x)>V(y)$.

(La situación de V(x) = V(y) se discutirá más adelante),

Si se tiene en cuenta que V(y) no puede ser menor que cero para obtener máximos y mínimos relativos, El valor de ρ que máximiza la diferencia angular debe ser inferior o igual a $(1/3)^{1/2}$ y superior a cero.

El valor de ρ que minimiza la diferencia angular debe ser superior o igual a - $(1/3)^{1/2}$ e inferior a cero.

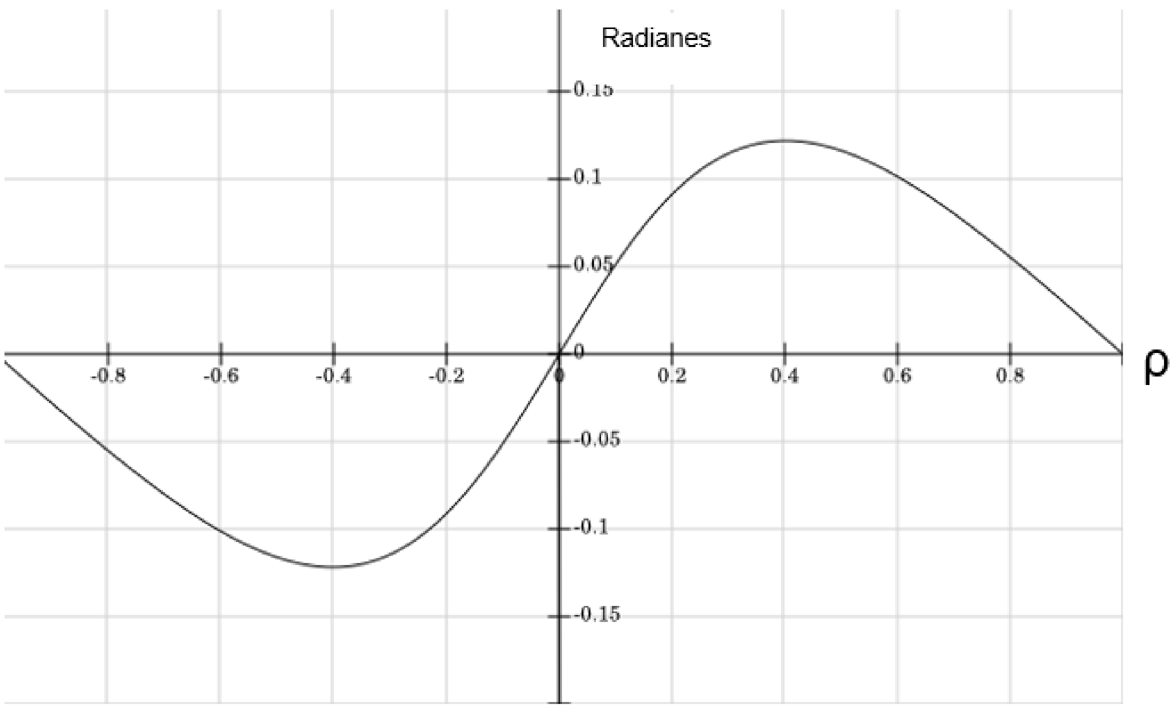
$$0<\rho_{max}\leq\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$-\sqrt{\frac{1}{3}} \leq \rho_{min} < 0$$

Deben interpretarse ρ_{max} y ρ_{min} como los valores de coeficiente de correlación que maximizan y minimizan la diferencia angular respectivamente

En el caso que $\rho = 0$ y V(x) – V(y) >0, la pendiente de la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) tendrá pendiente de 0 y por lo tanto el ángulo que forma con el eje de las X será cero. Es fácil deducir también que para la Recta de los Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) dicho valor es también cero y por ende la diferencia en ángulos será cero.

A continuación, se grafica la diferencia en radianes entre ángulos cuando V(x) – V(y)>0. Entre la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) y La recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) para cualquier valor de coeficiente de correlación ρ. En el ejemplo se empleará V(x) = 9 y V(y) = 4

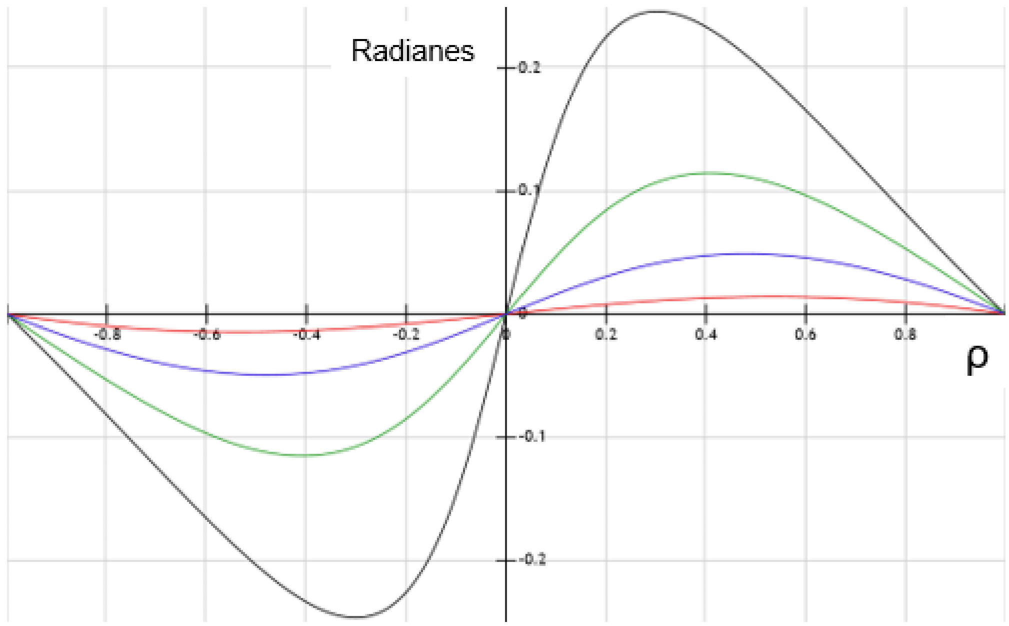


Grafica 4.Diferencia de ángulos en radianes entre la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales y la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (tradicional) V(x)>V(y) para V(x)=9, V(y)=4.

Diferencia máxima 0,1219 radianes en $\rho = \sqrt{(9-4)\,/\,(3\,(9)+4)} = 0,4016$

Diferencia mínima -0,1219 en $\rho = -\sqrt{(9-4)\,/\,(3\,(9)+4)} = -0,4016$, nótese que no hay diferencia en ρ=0, ρ =1, ρ= -1.

En la siguiente gráfica se ilustra las diferencias angulares entre La Recta de Los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) y la Recta de Los Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) para todos los valores de ρ. Se considerarán varias opciones que cumplan estas condiciones: V(x)+V(y)= constante, V(x) > V(y), Se apreciarán que a medida que se incrementa la diferencia V(x) –V(y) el valor de ρ para el máximo y el mínimo relativo se alejan de cero, pero disminuye la diferencia máxima y mínima angular. Esta última característica se justifica porque a medida que V(x) crece con respecto a V(y) las dos rectas consideradas se acercan a la horizontalidad y bajo esas condiciones las sumas de distancias cuadradas mínimas ortogonales y verticales también se acercan.



Grafica 5. Diferencia de ángulos en radianes entre la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales y la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (tradicional) en función del coeficiente de correlación cuando V(x)>V(y). Considerando distintas magnitudes V(x)-V(y).

Sea V(x) + V(y) = 10, Se dibujan las diferencias angulares para todos los valores de ρ: Línea roja: V(x) = 9, V(y)=1, Línea azul: V(x) =8, V(y)=2, Línea verde: V(x)=7, V(y) =3, Línea negra: V(x)=6, V(y)= 4

Cuando:

$$V(x) = V(y)$$

La segunda derivada es cero y no hay máximo ni mínimo relativo. Bajo esa igualdad de varianzas el análisis de la expresión de diferencias de ángulos se transforma en:

$$\frac{\pi}{4} - arc.tg(\rho)$$

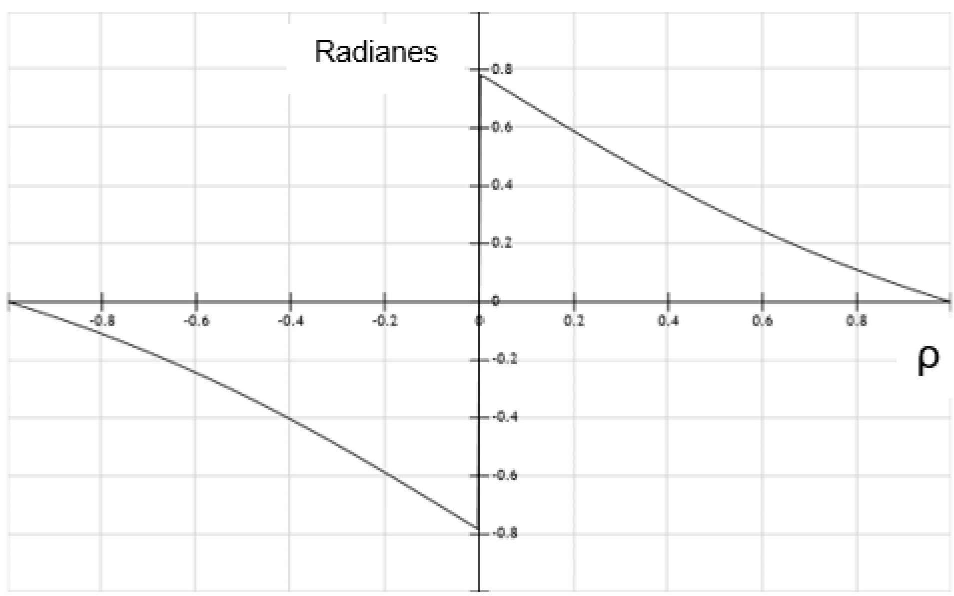
Para ρ >0, y:

$$-\frac{\pi}{4} - arc.tg(\rho)$$

Para $\rho < 0$

De acuerdo a lo anterior, cuando V(x) = V(y) la diferencia máxima en (no máximo relativo) en valor absoluto entre los ángulos de la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) y la Recta de los Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) será π/4 cuando ρ se acerca a cero y la menor (no mínimo relativo) será cero cuando ρ= ±1. En otros términos, cuando ρ se acerca a cero por la izquierda, la diferencia tiende a -π/4 y cuando ρ se acerca a cero por la derecha, la diferencia tiende a π/4.

Se mostrará la gráfica de diferencias angulares entre la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) y la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) para los valores de coeficiente de correlación bajo la condición V(x) = V(y), Nótese valores (Máximos y Mínimos no relativos)



Grafica 6. Diferencias angulares entre Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales y Mínimos Cuadrados Tradicionales, para todos los valores de ρ bajo la condición V(x)=V(y) Sea V(x)=V(y)=10.nótese los valores máximos no relativos en valor absoluto de π/4 cuando ρ=0 y mínimo cuando ρ=±1.

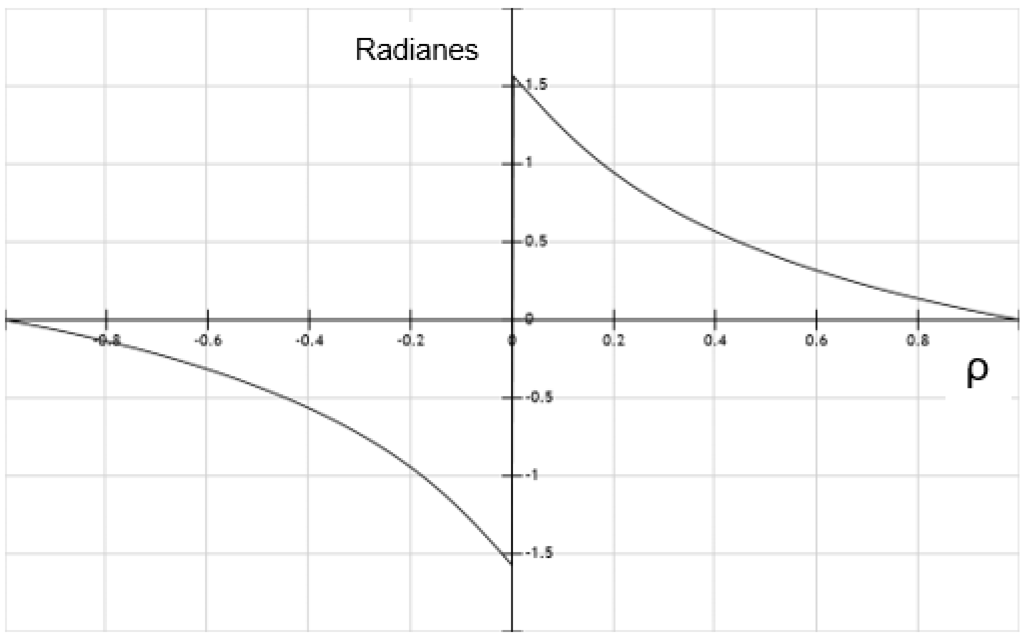
Diferencias angulares máximas y mínimas entre la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO)y la Recta de los Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) en función del coeficiente de correlación cuando V(x) < V(y).

Como se indicó, bajo esta condición no existen máximos ni mínimos relativos, sin embargo, el estudio de la expresión de la diferencia angular, permite concluir lo siguiente:

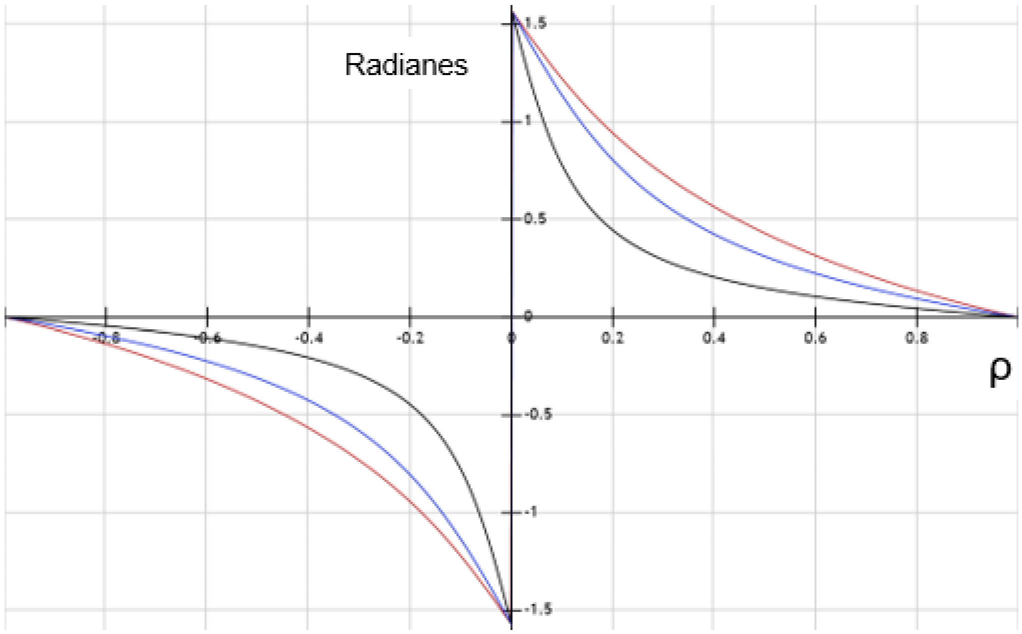
La diferencia mayor (no es máximo relativo) en valor absoluto se produce cuando ρ se acerca a cero. Si lo hace por la izquierda dicho valor es – π/2 y si lo hace por la derecha la diferencia es π/2.

La diferencia menor (no es mínimo relativo) se produce cuando ρ = ± 1, en ambos casos la diferencia es cero.

A continuación, se grafica la diferencia angular para todos los valores de ρ, entre la Recta de Los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) y la Recta de los Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) cuando V(x) < V(y).



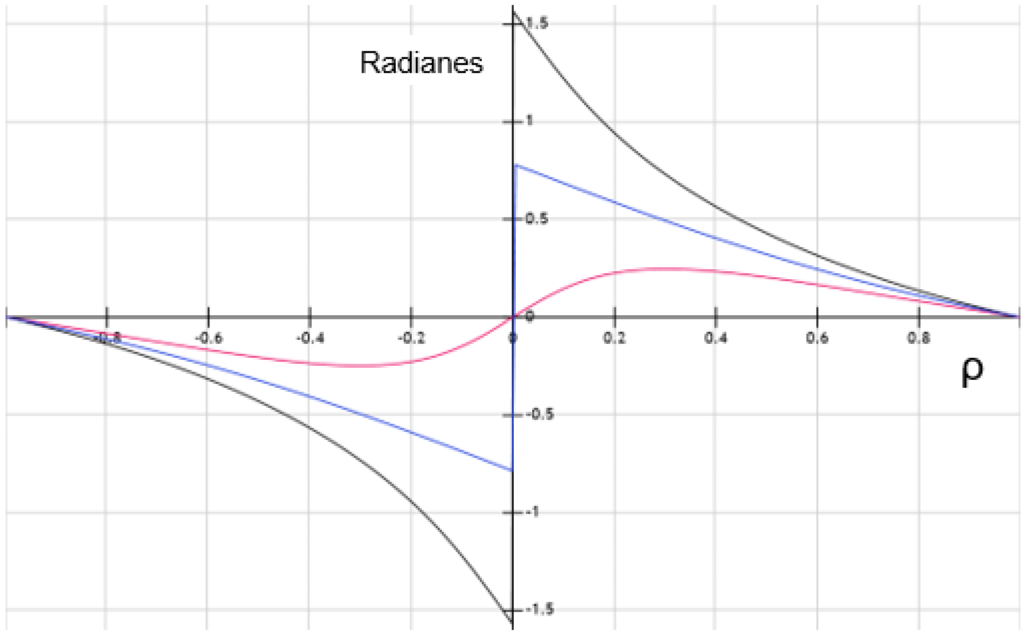
Grafica 7. Diferencias angulares en función de ρ entre la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales y la de los Mínimos Cuadrados Tradicional cuando V(x)<V(y). En este caso V(x)=4, V(y) = 10, obsérvese la diferencia máxima en valor absoluto de π/2 cuando ρ=0 y cero cuando ρ = ±1.



Grafica 8. Diferencia de ángulos en radianes entre la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales y la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (tradicional) en función del coeficiente de correlación cuando V(x)<V(y). Considerando distintas magnitudes V(y)–V(x), siendo V(x)+V(y)=k. Sea V(x)+V(y) = 10: Línea roja V(x)=4, V(y)= 6, Línea azul V(x) =0,5, V(y)=9,5, Línea negra: V(x)= 0,1 V(y)=9,9. Para todas las opciones la diferencia máxima (no relativa) angular en valor absoluto en π/2 cuando ρ= 0 y la diferencia mínima (no relativa) es cero cuando ρ=±1.

Resumen de diferencias angulares en función de coeficiente de correlación entre la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales y la Recta de los Mínimos Cuadrados Verticales.

Se considerarán las tres condiciones: V(x)>V(y), V(x)=V(y), V(x)<V(y) para V(x)+V(y)=constante.

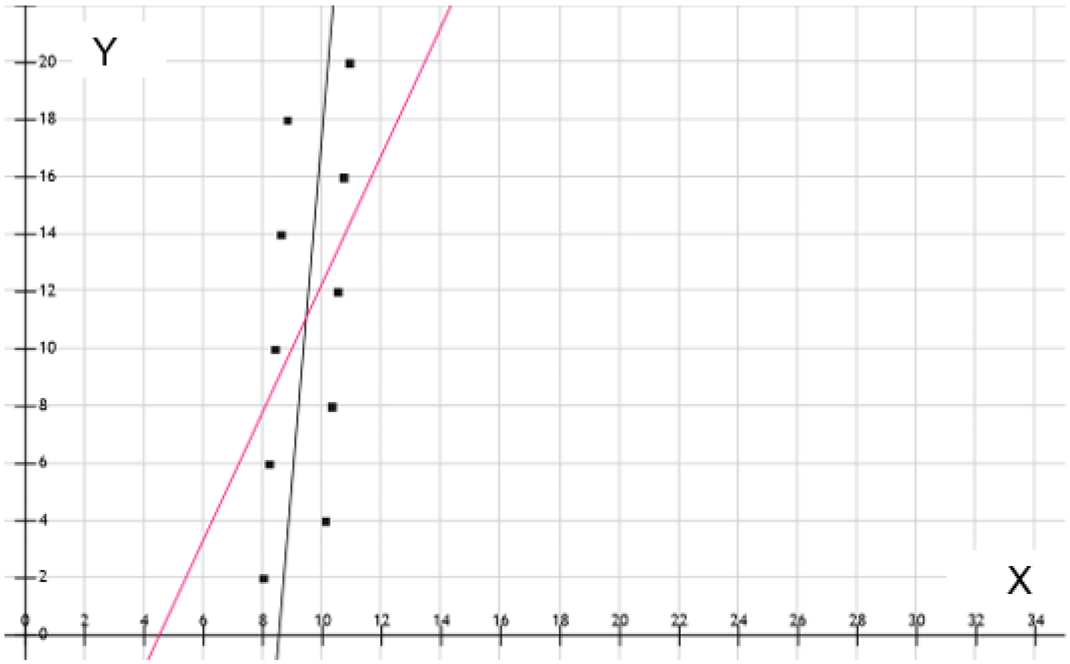


Grafica 9. Resumen de diferencias angulares para todos los coeficientes de correlación: Línea roja V(x)=6, V(y)=4, Línea negra: V(x)=4, V(y)=6, Línea azul: V(x)=V(Y)=5.

Conclusiones respecto a la diferencia angular entre la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) y la Recta de los Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV).

Considerando que desde el punto de vista geométrico y matemático es la Recta de Los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO)   la que más se aproxima a un conjunto dado de puntos, se demuestra que existen diferencias angulares con la Recta de los Mínimos Cuadrados Tradicional que pueden ser grandes bajo ciertas condiciones. La diferencia puede ser hasta de $\pi/2$ cuando $V(x) - V(y) < 0$, y hasta de $\pi/4$ cuando $V(x) - V(y) = 0$. Esto demuestra que la Recta de Los Mínimos Cuadrados Verticales (RMCO) puede estar muy lejos de la recta que más se aproxima a un conjunto de puntos dados. Siendo la Recta de Los Mínimos Cuadrados Ortogonales la que si cumple con ese propósito.

En la gráfica siguiente se ilustra que la Recta de Los Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) no es la recta que más se acerca a un conjunto de puntos. En contraste se puede apreciar la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales se aproxima mucho más al comportamiento lineal de las observaciones.



Grafica 10.Visualización de la mayor aproximación geométrica a un conjunto de puntos de la Recta de Los Mínimos Cuadrados Ortogonales con respecto a la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales Sean los puntos de coordenadas:(8,2); (10.1, 4); (8.2, 6); (10.3,8); (8,4, 10); (10.5, 12); (8.6, 14); (10.7, 16); (8.8, 18); (10.9, 20).
*En rojo: Recta Mínimos Cuadrados Tradicional (verticales): y= -10.10+2.24*x*
*En negro: Recta Mínimos Cuadrados Ortogonales: y= -103.24+12.09*x*

3.2. Comparación de pendiente en tres rectas de regresión.

Se practica comparaciones entre las pendientes de Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO), Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) y Recta de Mínimos Cuadrados Horizontales**.**

En la teoría de rectas de regresión también se contempla la Recta de Mínimos Cuadrados Horizontales, este lugar geométrico se incluye en el presente estudio.

Está recta tiene aplicación cuando:

$$\delta = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = 0$$

Recta de Mínimos Cuadrados Horizontales es aquella cuya suma de cuadrados de distancias horizontales medidas hasta ella desde un conjunto de puntos es mínima.

Se sabe que la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales tiene por pendiente:

$$b = \frac{-\left(V\left(x\right)-V\left(y\right)\right)+\sqrt{\left(V\left(x\right)-V\left(y\right)\right)^{2}+4.\left(Cov\left(x,y\right)\right)^{2}}}{2.Cov\left(x,y\right)}$$

Por su parte la pendiente de la recta de los mínimos cuadrados tradicional es:

$$b_1 = \frac{Cov(x,y))}{V\left(x\right)}$$

Puede demostrarse que la pendiente de la recta de los mínimos cuadrados horizontales es:

$$b_2 = \frac{V\left(y\right)}{Cov(x,y)}$$

Cuando el coeficiente de correlación es mayor o igual que cero (en este caso la covarianza también es mayor o igual que cero), se comprobará que:

$$b_1 \leq b \leq b_2$$

Primero se probará la parte derecha de la desigualdad:

$$\frac{-\left(V\left(x\right)-V\left(y\right)\right)+\sqrt{\left(V\left(x\right)-V\left(y\right)\right)^{2}+4.\left(Cov\left(x,y\right)\right)^{2}}}{2.Cov\left(x,y\right)} \leq \frac{V\left(y\right)}{Cov\left(x,y\right)}$$

Aplicando álgebra de desigualdades, y luego de realizar reducciones se llega a:

$$\left(Cov(x,y)\right)^{2} \leq V\left(x\right).V\left(y\right)$$

Lo cual es cierto.

Ahora se probará la parte derecha de la desigualdad:

$$\frac{Cov\left(x,y\right)}{V\left(x\right)} \leq \frac{-\left(V\left(x\right)-V\left(y\right)\right)+\sqrt{\left(V\left(x\right)-V\left(y\right)\right)^{2}+4\left(Cov\left(x,y\right)\right)^{2}}}{2.Cov\left(x,y\right)}$$

Aplicando álgebra de desigualdades, y luego de realizar reducciones se llega a:

$$\left(Cov(x,y)\right)^{2} \leq V\left(x\right).V\left(y\right)$$

Lo cual es cierto.

Aplicando igual procedimiento puede probarse que cuando el coeficiente de correlación es menor que cero (la covarianza también es menor que cero):

$b_2 \leq b \leq b_1$.

Para ilustrar lo dicho, se tomará como ejemplo es siguiente conjunto de puntos:

(1,1); (2,6); (4,2); (5,3); (6,13); (7,3); (8,13); (15,15).

$\bar{x} = 6, \bar{y} = 7$

V(x) = 16,5   V(y) = 28,75   Cov (x, y) =16

En este caso el coeficiente de correlación es positivo, ya que la covarianza lo es.

Aplicando las respectivas expresiones, se obtienen los siguientes valores para la pendiente y la constante a en cada caso:

Recta de los Mínimos Cuadrados Tradicional (verticales):

b_1 = 0,9697; a_1 = 1,1818

Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales:

b = 1,4536; a = - 1,7215

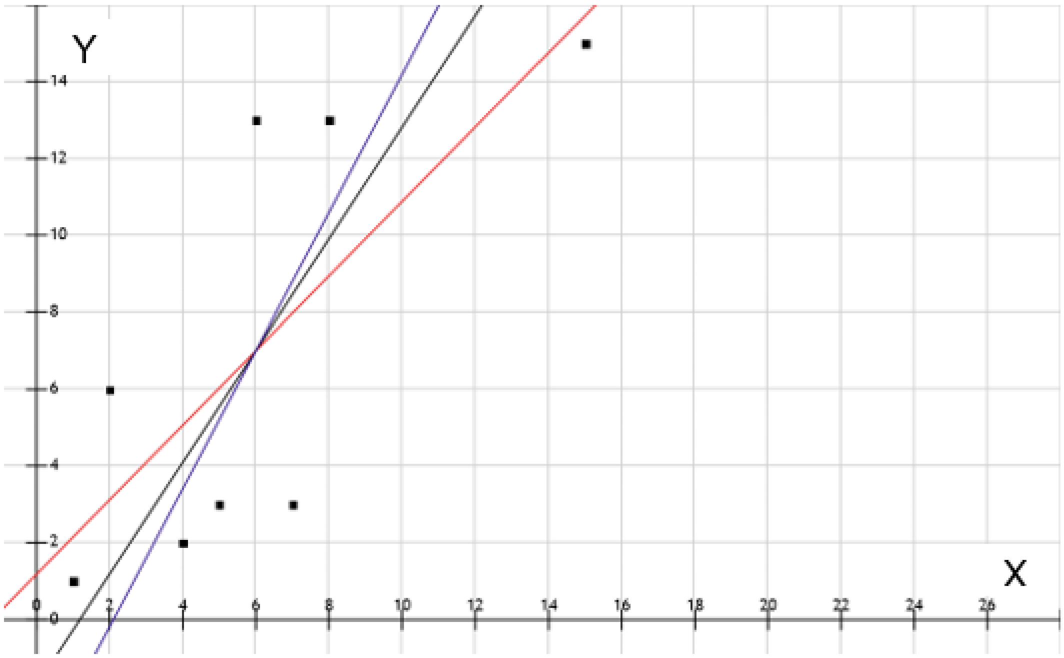
Para la Recta de Los Mínimos Cuadrados Horizontales:

b_2 = 1,7969; a_2 = -3,7813

Obsérvese: $b_1 \leq b \leq b_2$

$0,9697 \leq 1,4536 \leq 1,7969$

A continuación, la gráfica respectiva:



Grafica 11.Comparación de pendientes entre Recta de Mínimos Cuadrados Verticales, Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales y Mínimos Cuadrados Horizontales, para coeficiente de correlación positivo. Línea Roja: Recta de los Mínimos Cuadrados Tradicional (verticales), Línea Negra: Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales, Línea azul: Recta de los Mínimos Cuadrados Horizontales. Nótese que la pendiente de la Recta de los Mínimos Cuadrados tradicional es menor o igual que la pendiente de la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales y está a su vez es menor o igual que la pendiente de la Recta de los Mínimos Cuadrados Horizontal.

A Continuación una gráfica que ilustra que cuando el coeficiente de correlación es negativo, se cumple que: $b_2 \leq b \leq b_1$. En este caso en particular se empleó el siguiente conjunto de puntos:

(1,9); (2,11); (3,9); (4,8); (5,5); (7,11); (9,2); (9,1).

$\bar{x} = 5, \bar{y} = 7$

V(x) = 8,25 V(y) = 13,25 Cov (x, y) = -7,625

El coeficiente de correlación es negativo, puesto que la covarianza lo es:

Aplicando las respectivas expresiones, se obtienen los siguientes valores para la pendiente y la constante a en cada caso:

Recta de los Mínimos Cuadrados Tradicional (verticales):

$b_1 = -0,9242$; $a_1 = 11,6212$

Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales:

b = -1,3802; a = 13,9012

Para la Recta de Los Mínimos Cuadrados Horizontales:

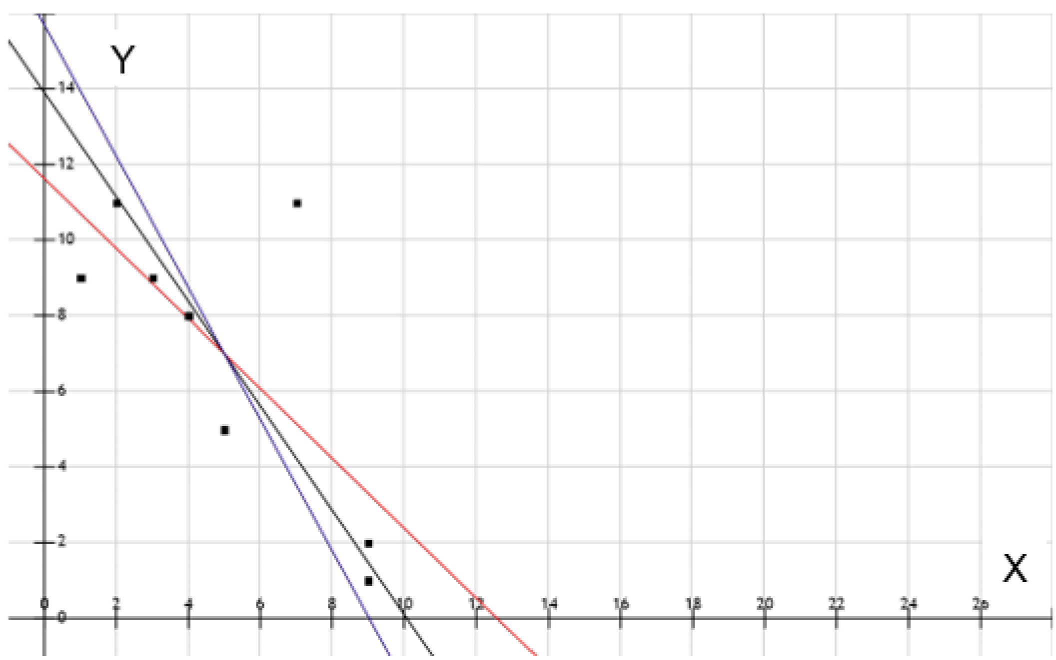
$b_2 =$ -1,7377; a_2 = 15,6885

Obsérvese

$b_2 \leq b \leq b_1$.

$-1,7377 \leq -1,3802 \leq -0,9242$

A continuación, la gráfica respectiva:



Grafica 12. Comparación de pendientes entre Recta de Mínimos Cuadrados Verticales, Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales y Mínimos Cuadrados Horizontales, para coeficiente de correlación negativo. Línea Roja: Recta de los Mínimos Cuadrados Verticales, Línea Negra: Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales, Línea azul: Recta de los Mínimos Cuadrados Horizontales. Nótese que la pendiente de la Recta de los Mínimos Cuadrados Horizontales es menor o igual que la pendiente de la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales y está a su vez es menor o igual que la pendiente de la Recta de los Mínimos Cuadrados Tradicional.

Pero en general y para todos los casos puede decirse que:

$|b_1| \leq |b| \leq |b_2|$

Relación entre la pendiente de la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales y las pendientes de la Recta de los Mínimos Cuadrados Tradicional y la Recta de Los mínimos cuadrados Horizontales.

Un trabajo algebraico con las tres pendientes lleva a la siguiente relación:

$$b = \frac{-\left(1 - b_1 b_2\right) + \sqrt{\left(1 - b_1 b_2\right)^2 + 4b_1^2}}{2b_1}$$

CAPÍTULO 4

DIFERENCIAS EN SUMA DE CUADRADOS DE DISTANCIAS

4.1. Ortogonales entre Recta Máximos Cuadrados Ortogonales y Recta Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO).

Se establece diferencia entre la suma de los cuadrados de las distancias perpendiculares a la Recta de Los Máximos Cuadrados Ortogonales y la suma de los cuadrados de las distancias perpendiculares a la Recta de Los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO).

En 2.1 se demostró que la suma de cuadrados de distancias ortogonales a una recta de pendiente b que pasa por el centroide de los puntos es

$$S = n\left(\frac{b^2.V\ (x) - 2b.Cov(x,y) + V(y)}{b^2+1}\right)$$

Si sobre esta expresión se reemplaza la pendiente de la Recta de Los Mínimos Cuadrados Ortogonales:

$$b = \frac{-\left(V\left(x\right) - V\left(y\right)\right) + \sqrt{\left(V\left(x\right) - V\left(y\right)\right)^2 + 4.\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2}}{2.Cov\left(x,y\right)}$$

Luego de realizar un trabajo algebraico y reducciones se obtiene la suma de cuadrados de distancias desde los puntos a la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO):

$$S_1 = n\left(\frac{V\left(x\right) + V\left(y\right) - \sqrt{4\left(Cov(x,y)\right)^2 + \left(V\left(x\right) - V\left(y\right)\right)^2}}{2}\right)$$

Ahora si sobre la expresión de la suma de cuadrados de distancias ortogonales a una recta de pendiente b que pasa por el centoride de los puntos se reemplaza la pendiente de la Recta de los Máximos Cuadrados Ortogonales se lográ:

$$S_2 = n\left(\frac{V\left(x\right) + V\left(y\right) + \sqrt{4\left(Cov(x,y)\right)^2 + \left(V\left(x\right) - V\left(y\right)\right)^2}}{2}\right)$$

La diferencia entre la suma de cuadrados de distancias ortogonales de un conjunto de puntos a la Recta de los Máximos Cuadrados Ortogonales y la suma de cuadrados de distancias ortogonales a Recta de Los Mínimos Cuadrados Ortogonales será:

$$S_2 - S_1 = n\sqrt{4\,(Cov(x,y))^2 + (V\,(x) - V\,(y))^2}$$

Que en función del coeficiente de correlación puede expresarse:

$$S_2 - S_1 = n\sqrt{4\rho^2 V\,(x)\,V\,(y) + (V\,(x) - V\,(y))^2}$$

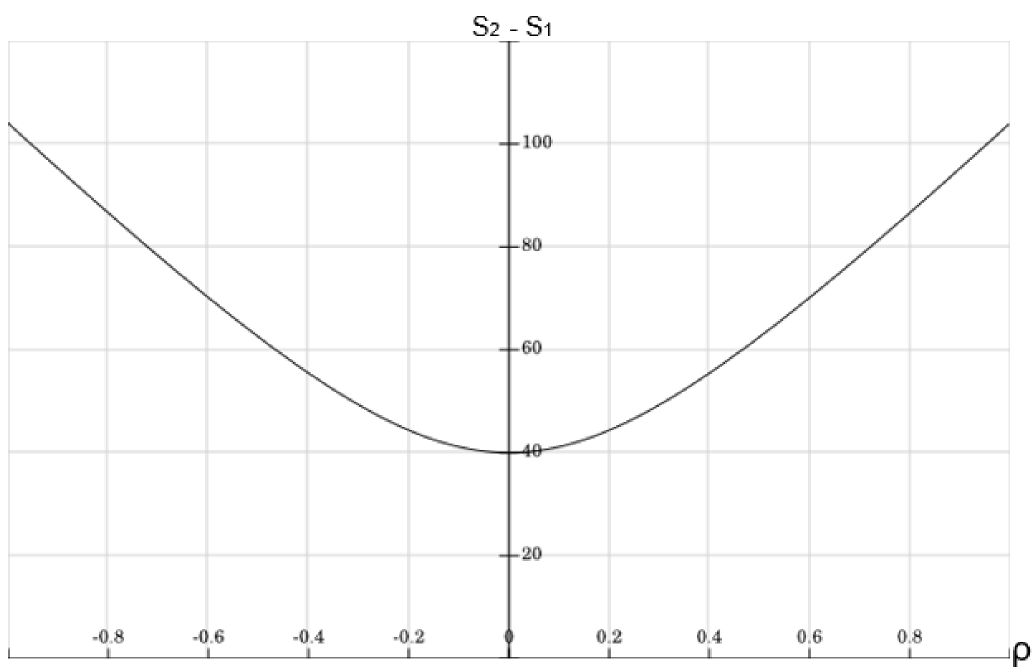
Es fácil notar que el valor máximo de dicha diferencia, se obtendrá cuando $\rho = \pm\ 1$, en cuyo caso:

$$S_2 - S_1 = n\,(V\,(x) + V\,(y))$$

Por su parte, el valor mínimo de la diferencia, se logrará cuando ρ = 0, en cuyo caso:

$$S_2 - S_1 = n\,|V\,(x) - V\,(y)|$$

En seguida se graficara la diferencia entre la suma de los cuadrados de las distancias perpendiculares de un conjunto de puntos hasta la Recta de los Máximos Cuadrados y la suma de los cuadrados de las distancias perpendiculares a la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales para los valores de ρ en un caso particular: V(x) = 9, V(y) =4, n = 8.



Grafica 13. Diferencias entre la suma de cuadrados de distancias perpendiculares a la Recta de Los Máximos Cuadrados Ortogonales y la suma de los cuadrados de las distancias perpendiculares a la Recta de Los Mínimos Cuadrados Ortogonales en función del coeficiente de correlación. Sea V(x) = 9 V(y) = 4, n = 8.

4.2. Entre verticales a la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales y Ortogonales a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales.

Se estudia la diferencia entre la suma de los cuadrados de las distancias verticales a la Recta de Los Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) y la suma de los cuadrados de las distancias perpendiculares a la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO)**.**

En el ítem anterior se expuso que la suma de los cuadrados de las distancias perpendiculares a la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales es:

$$S_1 = n\left(\frac{V(x)+V(y)-\sqrt{4\left(Cov(x,y)\right)^2+\left(V(x)-V(y)\right)^2}}{2}\right)$$

Ahora se determinará la suma de los cuadrados de las distancias verticales a la Recta de los Mínimos Cuadrados Verticales. Tal suma es:

$$S_{1T} = \sum\left(y_i-(a+bx_i)\right)^2$$

Donde a y b son los parámetros tradicionales.

Remplazando el valor de a:

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$S_{1T} = \sum\left((y_i-\bar{y})-b\left(x_i-\bar{x}\right)\right)^2$$

Trabajando la expresión se llega a:

$$S_{1T} = n\left(b^2V(x)-2bCov(x,y)+V(y)\right)$$

Se sabe que la recta de los mínimos cuadrados tradicionales tiene por pendiente:

$$b = \frac{Cov(x,y)}{V(x)}$$

Reemplazando este valor y haciendo algunas reducciones se llega a:

$$S_{1T} = n\left(\frac{V(x)V(y)-\left(Cov(x,y)\right)^2}{V(x)}\right)$$

La siguiente será la diferencia entre la suma de los cuadrados de las distancias verticales a la Recta de Los Mínimos Cuadrados tradicional y la suma de los cuadrados de las distancias perpendiculares a la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales.

$$S_{1T}-S_1 = n\left(\frac{V(x)\,V(y)-(Cov(x,y))^2}{V(x)} - \frac{V(x)+V(y)-\sqrt{4\,(Cov(x,y))^2+(V(x)-V(y))^2}}{2}\right)$$

Esta diferencia es mayor o igual a cero, comprobación que se hace a continuación:

Demostración:

Se parte de la conocida desigualdad:

$$V(x)\,.V(y) \geq (Cov(x,y))^2$$

Sumando a lado y lado de la desigualdad $V(x)\,V(y)$:

$$(V(x))^2 + V(x)\,.V(y) \geq (V(x))^2 + (Cov(x,y))^2$$

$$(V(x))^2 \geq V(x)\,(V(x)-V(y)) + (Cov(x,y))^2$$

Multiplicando los dos lados de la desigualdad por: $4\,(Cov(x,y))^2$:

$$4\,(V(x))^2\,(Cov(x,y))^2 \geq 4V(x)\,(Cov(x,y))^2\,(V(x)-V(y))+4\,(Cov(x,y))^4$$

Sumando a los dos lados de la desigualdad $(V(x))^2\,(V(x)-V(y))^2$:

$$4\,(V(x))^2\,(Cov(x,y))^2 + (V(x))^2\,(V(x)-V(y))^2 \geq$$

$$4V(x)\,(Cov(x,y))^2\,(V(x)-V(y))+4\,(Cov(x,y))^4+(V(x))^2\,(V(x)-V(y))^2$$

$$(V(x))^2\left(4\,(Cov(x,y))^2+(V(x)-V(y))^2\right) \geq \left(V(x)\,(V(x)-V(y))+2\,(Cov(x,y))^2\right)^2$$

$$V(x)\sqrt{4\,(Cov(x,y))^2+(V(x)-V(y))^2} \geq V(x)\,(V(x)-V(y))+2\,(Cov(x,y))^2$$

Sumando a los dos lados de la desigualdad $2V(x)\,V(y)$:

$$V(x)\sqrt{4\,(Cov(x,y))^2+(V(x)-V(y))^2}+2V(x)\,V(y) \geq$$

$$V(x)\,(V(x)-V(y))+2\,(Cov(x,y))^2+2V(x)\,V(y)$$

$$\frac{V(x)\,V(y)-(Cov(x,y))^2}{V(x)} \geq \frac{V(x)+V(y)-\sqrt{4\,(Cov(x,y))^2+(V(x)-V(y))^2}}{2}$$

Por lo tanto:

$$S_{1T}-S_1 = n\left(\frac{V(x)V(y)-(Cov(x,y))^2}{V(x)} - \frac{V(x)+V(y)-\sqrt{4(Cov(x,y))^2+(V(x)-V(y))^2}}{2}\right)$$

$$\geq 0$$

En consecuencia, la suma de los cuadrados de las distancias verticales a la Recta de los Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) es mayor o igual que la suma de los cuadrados de las distancias ortogonales a la Recta de los Mínimos cuadrados Ortogonales (RMCO).

A continuación, se profundiza en la diferencia entre la suma de los cuadrados de las distancias verticales a la Recta de Los Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) y la suma de los cuadrados de las distancias perpendiculares a la Recta de Los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO).

Si se reemplaza:

$$Cov(x,y) = \sqrt{V(x)V(y)}.\rho$$

$$S_{1T} - S_1 =$$

$$n\left(\frac{V(x)V(y)-V(x)V(y)\rho^2}{V(x)} - \frac{V(x)+V(y)-\sqrt{4V(x)V(y)\rho^2+(V(x)-V(y))^2}}{2}\right)$$

$$S_{1T}|-S_1 = n\left(V(y)\left(1-\rho^2\right) - \frac{V(x)+V(y)-\sqrt{4V(x)V(y)\rho^2+(V(x)-V(y))^2}}{2}\right)$$

Es evidente que cuando ρ = ± 1, la diferencia es cero para todos los casos

Se pueden buscar los valores mínimos y máximos para la diferencia que se está tratando.

La primera derivada de la diferencia con respecto a ρ igualada a cero, es la siguiente:

$$2.n.V(y)\rho\left(-1+\frac{V(x)}{\sqrt{4V(x)V(y)\rho^2+(V(x)-V(y))^2}}\right) = 0$$

La solución de esta ecuación entrega los siguientes posibles puntos críticos:

$$\rho = 0$$

$$\rho = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2V\left(x\right)-V\left(y\right)}{V\left(x\right)}}$$

Se recurrirá al criterio de la segunda derivada para definir si se trata de máximos o mínimos relativos.

La segunda derivada de la diferencia con respecto a ρ es:

$$2.n.V\left(y\right)\left(-1+\frac{V\left(x\right)\left(V\left(x\right)-V\left(y\right)\right)^{2}}{\left(4V\left(x\right)V\left(y\right)\rho^{2}+\left(V\left(x\right)-V\left(y\right)\right)^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Reemplazando en esta expresión

$$\rho = 0$$

Se obtiene:

$$2.n.V\left(y\right)\left(-1+\frac{V\left(x\right)}{\left|V\left(x\right)-V\left(y\right)\right|}\right)$$

Cuando:

$$V\left(x\right) \geq V(y)$$

La segunda derivada se convierte en

$$\frac{2.n.\left(V\left(y\right)\right)^{2}}{V\left(x\right)-V\left(y\right)}$$

Que siempre es un valor positivo existiendo en ρ= 0 un mínimo relativo.

Pero cuando $V(x) < V(y)$ la segunda derivada se convierte en:

$$2.n.V\left(y\right)\left(\frac{2V\left(x\right)-V\left(y\right)}{V\left(y\right)-V\left(x\right)}\right)$$

Que obviamente es positiva cuando:

$$2V(x) - V(y) > 0$$

Existiendo bajo esa condición un mínimo relativo

Pero si:

$$2V(x) - V(y) < 0$$

La segunda derivada es negativa, existiendo bajo esa condición un máximo relativo.

Se estudiará ahora los dos restantes valores críticos, es decir cuándo:

$$\rho = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2V\ (x) - V\ (y)}{V\ (x)}}$$

Se aplicará solo cuando

$$2V(x) - V(y) > 0$$

Reemplazando en la segunda derivada se obtiene:

$$-2.n.\ (V\ (y))^2\left(\frac{2V\ (x) - V\ (y)}{(V\ (x))^2}\right)$$

Que es un valor negativo, por lo tanto, en:

$$\rho = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2V\ (x) - V\ (y)}{V\ (x)}}$$

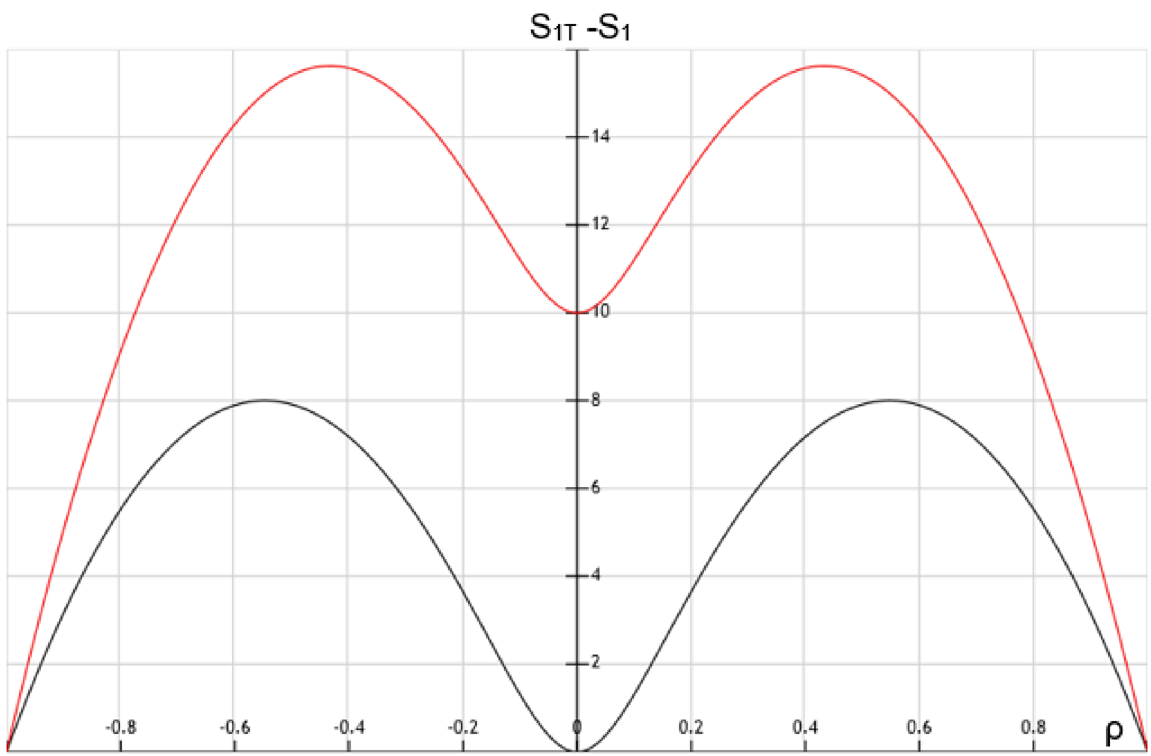
Existen máximos relativos.

Los valores máximos y mínimos correspondientes a los valores críticos se han obtenido al reemplazar los ρ estudiados en la expresión de la diferencia S_{1T} - $S_{1.}$

En seguida se escribe el resumen de la posición de máximos y mínimos relativos y sus valores para todas las condiciones posibles. En dicho cuadro se podrá apreciar la magnitud de las diferencias, demostrándose que, tratándose de distancias, la suma de distancias cuadradas ortogonales a la Recta de los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) es menor a las suma de cuadrados de distancias verticales a la Recta de los Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV), exceptuado las situaciones de ρ=±1, y la posición ρ=0 para $V\ (x) \geq V\ (y)$ en las cuales hay igualdad.

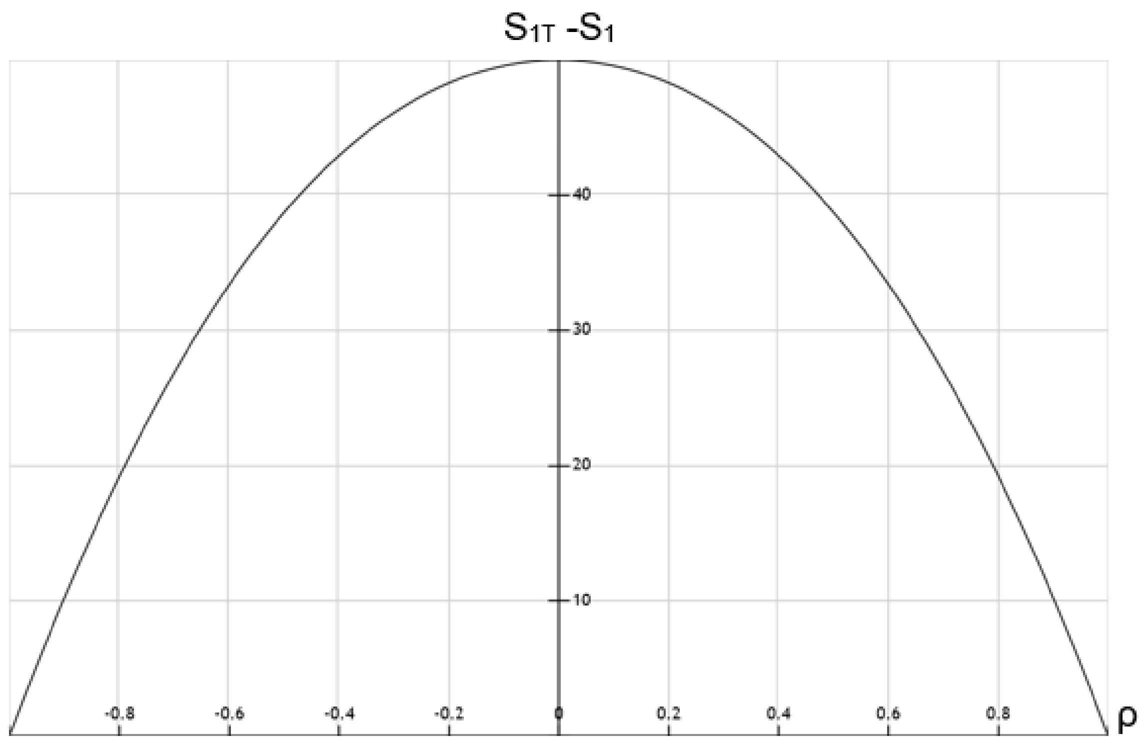
	CONDICION		
Posición	$V(x) \geq V(y)$	$V(x) < V(y) \cap 2V(x) > V(y)$	$V(x) < V(y) \cap 2V(x) < V(y)$
$\rho = 0$	Mínimo relativo (0)	Mínimo relativo $n(V(y) - V(x))$	Máximo Relativo $n(V(y) - V(x))$
$\rho = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2V(x) - V(y)}{V(x)}}$	Máximos relativ. $n\left(\frac{(V(y))^2}{4V(x)}\right)$	Máximos relativ. $n\left(\frac{(V(y))^2}{4V(x)}\right)$	

A continuación, se grafica las diferencias entre las sumas de cuadrados de distancias verticales a la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) y suma de cuadrados de distancias ortogonales a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) en función de ρ para dos situaciones: Línea negra: $V(x) \geq V(y)$, línea roja: $V(x) < V(y) \cap 2V(x) > V(y)$.



Grafica 14. Diferencias entre las sumas de cuadrados de distancias verticales a la Recta de Mínimos Cuadrados Tradicionales y suma de cuadrados de distancias ortogonales a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales en función de ρ para dos situaciones: Línea negra: $V(x) \geq V(y)$, *línea roja:* $V(x) < V(y) \cap 2V(x) > V(y)$ *Línea Negra: n=10, V(x) =5, V(y) = 4. Línea roja: n=10, V(x)=4, V(y) = 5.*

En seguida se ilustra las diferencias entre las sumas de cuadrados de distancias verticales a la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) y suma de cuadrados de distancias ortogonales a la Recta de Mínimos Cuadrados ortogonales (RMCO) en función de ρ para la situación: $V(x) < V(y) \cap 2V(x) < V(y)$.



Grafica 15.Diferencias entre las sumas de cuadrados de distancias verticales a la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales y suma de cuadrados de distancias ortogonales a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales en función de ρ para la situación: $V(x) < V(y) \cap 2V(x) < V(y)$*. Sea n=10, V(x)=2, V(y)=7.*

4.3. Comparación de varianzas de suma de cuadrados de distancias.

Se realiza comparación entre la varianza de las distancias verticales de la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) y la varianza de las distancias ortogonales de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO).

Sea d la distancia ortogonal de uno de los puntos a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO).

Sea dT la distancia vertical de uno de los puntos a la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV).

Sea S la suma de cuadrados de distancias ortogonales de un conjunto de puntos a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO).

Sea S_T la suma de cuadrados de distancias verticales de un conjunto de puntos a la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV).

$$V\left(d\right)=\frac{S}{n} \qquad\qquad V\left(d_T\right)=\frac{S_T}{n}$$

En el ítem anterior se demostró que:

$$S\leq S_T$$

Por lo tanto:

$$V\left(d\right)\leq\left(d_T\right)$$

En otras palabras, la varianza de las distancias ortogonales a la Recta de Los Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO), es menor o igual a la varianza de las distancias verticales a la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV).

CAPÍTULO 5

ESPERANZA Y VARIANZA DE SUMA DE CUADRADOS DISTANCIAS ORTOGONALES

Se deduce Esperanza Matemática y Varianza de la suma de los cuadrados de las distancias ortogonales a las rectas que pasan por el centroide de un conjunto de puntos.

5.1. Esperanza matemática.

A continuación, se encuentra la Esperanza Matemática de la suma de los cuadrados de las distancias ortogonales a las rectas que pasan por el centroide de un conjunto de puntos.

Si se considera un conjunto de puntos y se toman al azar rectas que pasan por $p(\bar{x}, \bar{y})$, se determina la esperanza de la suma de cuadrados de distancias de los puntos a las rectas. Se asume que cada recta tiene igual probabilidad de ocurrir.

Se conoce que la suma de los cuadrados de las distancias ortogonales a una recta de pendiente b es:

$$S = n\left(\frac{b^2.V\ (x) - 2b.Cov(x, y) + V(y)}{b^2 + 1}\right)$$

Que escrito de otra manera resulta:

$$S = n\left(\frac{V\ (x)\ tg^2\theta - 2Cov\ (x, y)\ tg\theta + V\ (y)}{tg^2\theta + 1}\right)$$

Donde θ es el ángulo que forma la recta con el eje x, realizando una sencilla identidad trigonométrica se llega a:

$$S = n(V(x)sen^2\theta - Cov(x, y)(sen2\theta) + V(y)cos^2\theta)$$

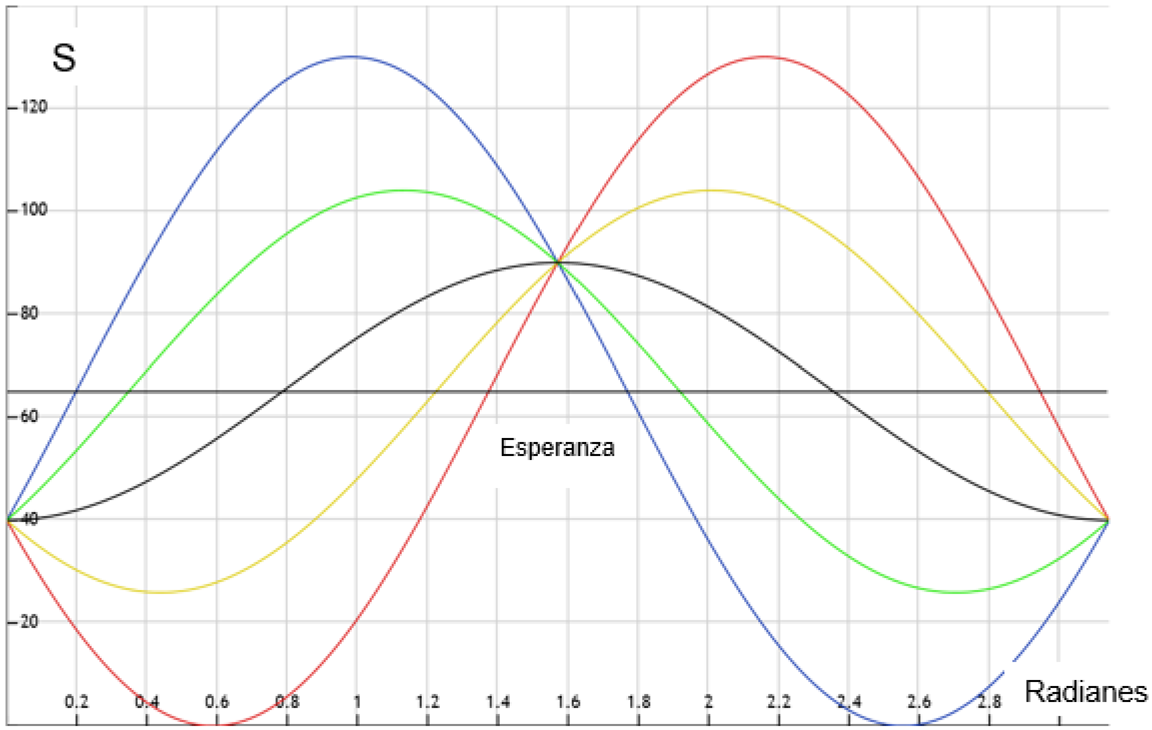
La media de la suma de los cuadrados de las distancias será:

$$E(S) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi n(V(x)sen^2\theta - Cov(x, y)sen2\theta + V(y)cos^2\theta)d\theta$$

$$E(S) = \frac{n}{\pi}\left[V(x)(\frac{\theta}{2} - \frac{sen2\theta}{4}) + Cov(x, y)(\frac{cos2\theta}{2}) + V(y)(\frac{\theta}{2} + \frac{sen2\theta}{4})\right]_0^\pi$$

$$E(S) = n\left(\frac{V(x) + V(y)}{2}\right)$$

La media o esperanza de la suma de los cuadrados de las distancias (ortogonales) de un conjunto de puntos a las rectas que pasan por $p(\bar{x},\bar{y})$, es el promedio de las varianzas de las dos variables multiplicado por el número de puntos. Nótese que la media no depende de la covarianza y en consecuencia tampoco depende del coeficiente de correlación.



Grafica 16.Independencia con respecto al coeficiente de correlación de la Esperanza de suma de cuadrados de distancias ortogonales a las rectas que pasan por el centroide de un conjunto de puntos. Se visualiza que la esperanza de la suma de cuadrados ortogonales a las rectas que pasan por centroide de un conjunto de puntos no depende del coeficiente de correlación de los mismos. En este caso en particular se ha empleado V(x) = 9, V(y)= 4, n=10 en el eje de las X aparece el ángulo en radianes desde cero hasta π, en las ordenadas la suma de cuadrados de distancias ortogonales para cada ángulo de la recta con el eje X. se han escogido el siguiente coeficiente de correlación: ρ=-1 (línea azul), ρ=-0,5 (línea verde), ρ=0 (línea negra), ρ=0,5 (línea amarilla), ρ=1 (línea roja), nótese la esperanza matemática de 65.

5.2. Varianza.

Se deduce la varianza de la suma de los cuadrados de las distancias ortogonales a las rectas que pasan por el centroide de un conjunto de puntos.

Se asume que todas las rectas tienen igual probabilidad de ocurrencia:

Se conoce que:

$$S = n(V(x)sen^2\theta - Cov(x,y)(sen2\theta) + V(y)cos^2\theta)$$

$$S^2 = n^2(V(x)sen^2\theta - Cov(x,y)sen2\theta + V(y)cos^2\theta)^2$$

$$E(S^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} n^2(V(x)sen^2\theta - Cov(x,y)sen2\theta + V(y)cos^2\theta)^2 d\theta$$

$$E(S^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} n^2(V(x)sen^2\theta - Cov(x,y)sen2\theta + V(y)cos^2\theta)^2 d\theta$$

$$E\left(S^2\right) = \frac{n^2}{8}\left(3\left((V(x))^2 + (V(y))^2\right) + 2V(x)\,V(y) + 4\,(Cov(x,y))^2\right)$$

$$V(S) = E(S^2) - (E(S))^2$$

$$V(S) = \frac{n^2}{8}\left(3\left((V(x))^2 + (V(y))^2\right) + 2V(x)\,V(y) + 4\,(Cov(x,y))^2\right) - \left(n\left(\frac{V(x)+V(y)}{2}\right)\right)^2$$

$$V(S) = \frac{n^2}{8}\left((V(x) - V(y))^2 + 4\,(Cov(x,y))^2\right)$$

Es fácil observar que la mínima varianza de la suma de cuadrados de distancias ortogonales de un conjunto puntos a las rectas que pasan por el centroide, se logrará cuando el coeficiente de correlación es cero, en ese caso se tendrá:

$$V(S) = \frac{(n\,(V(x) - V(y)))^2}{8}$$

De otra parte, la máxima varianza de la suma de cuadrados de distancias ortogonales de un conjunto puntos a las rectas que pasan por el centroide, se logrará cuando el coeficiente de correlación es en valor absoluto uno, en ese caso se tendrá:

$$V(S) = \frac{(n\,(V(x) + V(y)))^2}{8}$$

CAPÍTULO 6

FUNCIONES DE PROBABILIDAD Y DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

6.1. Función de Probabilidad de la suma de los cuadrados de las distancias ortogonales.

Se determina la Función de Probabilidad de la suma de los cuadrados de las distancias ortogonales a las rectas que pasan por el centroide de un conjunto de puntos.

De 2.1 se sabe que:

$$S = n\left(\frac{V(x)\,tg^2\theta - 2Cov(x,y)\,tg\theta + V(y)}{tg^2\theta + 1}\right)$$

Que puede expresarse:

$$S.sec^2\theta = n\left(V(x)\,tg^2\theta - 2Cov(x,y)\,tg\theta + V(y)\right)$$

Derivando implícitamente θ con respecto a S y luego despejando:

$$\frac{d\theta}{dS} = \frac{1}{2n\left(\left(V(x) - \frac{S}{n}\right)tg\theta - Cov(x,y)\right)}$$

Despejando tgθ se obtiene:

$$tg\theta = \frac{-Cov(x,y) \pm \sqrt{(Cov(x,y))^2 - (S/n - V(x))\,(S/n - V(y))}}{S/n - V(x)}$$

El signo ± significa que para una suma de distancias cuadradas ortogonales, existen dos ángulos, con excepción de la suma de cuadrados de distancias mínima (correspondiente a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales) y la suma de cuadrados de distancias máxima (correspondiente a la Recta de los Máximos Cuadrados Ortogonales) que solo corresponden a un solo ángulo en el intervalo [0, π).

Reemplazando ese valor de la tangente en la derivada se llega a:

$$\frac{d\theta}{dS} = \frac{\pm 1}{2n\sqrt{(Cov(x,y))^2 - \left(\frac{S}{n} - V(x)\right)\left(\frac{S}{n} - V(y)\right)}}$$

El incremento de probabilidad de ocurrencia de la suma de cuadrados de distancias ortogonales es únicamente función del incremento del ángulo θ con respecto al incremento la dicha suma de cuadrados de distancias ortogonales.

El incremento de ángulo con respecto al incremento de distancia es positivo cuando se avanza angularmente en el sentido Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales – Recta de Máximos Cuadrados Ortogonales, y es negativo cuando el sentido de avance angular es Máximo de Cuadrados Ortogonales – Recta de Mínimos Cuadrados ortogonales.

El signo ± y la expresión en la derivada evidencia que existe simetría en los ángulos a lado y lado de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales para un mismo valor de S.

Por dicha simetría bastará tomar las derivadas positivas en la determinación de la Función de Probabilidad.

Para establecer la función de probabilidad el valor de la variable independiente es S y debe contemplarse desde el valor S_{min} correspondiente a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales hasta S_{max} correspondiente a la Recta de Máximos Cuadrados Ortogonales.

Por lo tanto:

$$f(S) = k.\frac{d\theta}{dS}$$

Donde k es una constante.

Más adelante se comprueba que:

$$k = \frac{1}{\pi}$$

$$f\left(S\right) = \frac{1}{n\pi\sqrt{\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2 - \left(S/n - V\left(x\right)\right)\left(S/n - V\left(y\right)\right)}}$$

Para:

$$S \leq n\left(\frac{V\left(x\right) + V\left(y\right) + \sqrt{4\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2 + \left(V\left(x\right) - V\left(y\right)\right)^2}}{2}\right)$$

(El valor anterior es la suma de distancias cuadradas ortogonales a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales). Véase 4.1

$$S \geq n\left(\frac{V\left(x\right) + V\left(y\right) - \sqrt{4\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2 + \left(V\left(x\right) - V\left(y\right)\right)^2}}{2}\right)$$

(El valor anterior es la suma de distancias cuadradas ortogonales a la Recta de Máximos Cuadrados Ortogonales). Véase 4.1

$f\left(S\right) = 0$ Para otro valor de S.

Comprobación que la función encontrada es Función de Probabilidad.

Trabajando algebraicamente la función de probabilidad se puede lograr la siguiente expresión para la función de probabilidad:

$$f(S) = \frac{2}{n\pi\sqrt{4(Cov(x,y))^2 + (V(x) - V(y))^2}\sqrt{1 - \left(\frac{2S/n-(V(x)+V(y))}{\sqrt{4(Cov(x,y))^2+(V(x)-V(y))^2}}\right)^2}}$$

De 4.1 se sabe que la mínima suma de los cuadrados de las distancias a la Recta de los Mínimos Cuadrados ortogonales y la máxima suma de los cuadrados de las distancias ortogonales a la misma recta son respectivamente:

$$S_1 = n\left(\frac{V(x) + V(y) - \sqrt{4\left(Cov(x,y)\right)^2 + \left(V(x) - V(y)\right)^2}}{2}\right)$$

$$S_2 = n\left(\frac{V(x) + V(y) + \sqrt{4\left(Cov(x,y)\right)^2 + \left(V(x) - V(y)\right)^2}}{2}\right)$$

Es obvio que se trata de las mínimas y máximas sumas de cuadrados de distancias ortogonales a las rectas que pasan por $p(\bar{x},\bar{y})$

Si se trata de una función de probabilidad, su integral entre estas sumas de cuadrados de distancias ortogonales a las rectas que pasan por $p(\bar{x},\bar{y})$ (mínima y Máxima) debe ser uno.

En efecto:

$$\int_{S_1}^{S_2} \frac{2dS}{n\pi\sqrt{4(Cov(x,y))^2 + (V(x) - V(y))^2}\sqrt{1 - \left(\frac{2S/n-(V(x)+V(y))}{\sqrt{4(Cov(x,y))^2+(V(x)-V(y))^2}}\right)^2}}$$

$$\frac{1}{\pi}arc.sen\left[\frac{2S/n - (V(x) + V(y))}{\sqrt{4\left(Cov(x,y)\right)^2 + \left(V(x) - V(y)\right)^2}}\right]_{S_1}^{S_2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(arc.sen\left(1\right) - arc.sen\left(-1\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1$$

Queda probado que la función expuesta es una función de probabilidad.

Valores máximos y mínimos de la Función de Probabilidad encontrada.

Si se reemplaza en la Función de Probabilidad encontrada el valor de S correspondiente al valor mínimo de la suma de cuadrados ortogonales a las rectas que pasan por el centroide de los puntos, que corresponde a la suma de cuadrados ortogonales a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) se obtiene:

$$S_1 = n\left(\frac{V(x) + V(y) - \sqrt{4\,(Cov(x,y))^2 + (V(x) - V(y))^2}}{2}\right)$$

$$f(S_1) \to \infty$$

Si se reemplaza en la Función de Probabilidad encontrada el valor de S correspondiente al valor máximo de la suma de cuadrados ortogonales a las rectas que pasan por el centroide de los puntos, que corresponde a la suma de cuadrados ortogonales a la Recta de Máximos Cuadrados Ortogonales se obtiene:

$$S_2 = n\left(\frac{V(x) + V(y) + \sqrt{4\,(Cov(x,y))^2 + (V(x) - V(y))^2}}{2}\right)$$

$$f(S_2) \to \infty$$

En S_1 y en S_2 que corresponden a las sumas de cuadrados de distancias a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) y a la Recta de Máximos Cuadrados Ortogonales, se encuentran los máximos de la Función de Probabilidad en esos valores la función tiende a infinito.

Se puede determinar el valor de S para el cual la función de probabilidad entrega un valor mínimo relativo.

Si se deriva la función de probabilidad con respecto a S y se iguala a cero, se obtiene un valor mínimo relativo. Dicho valor se ubica en:

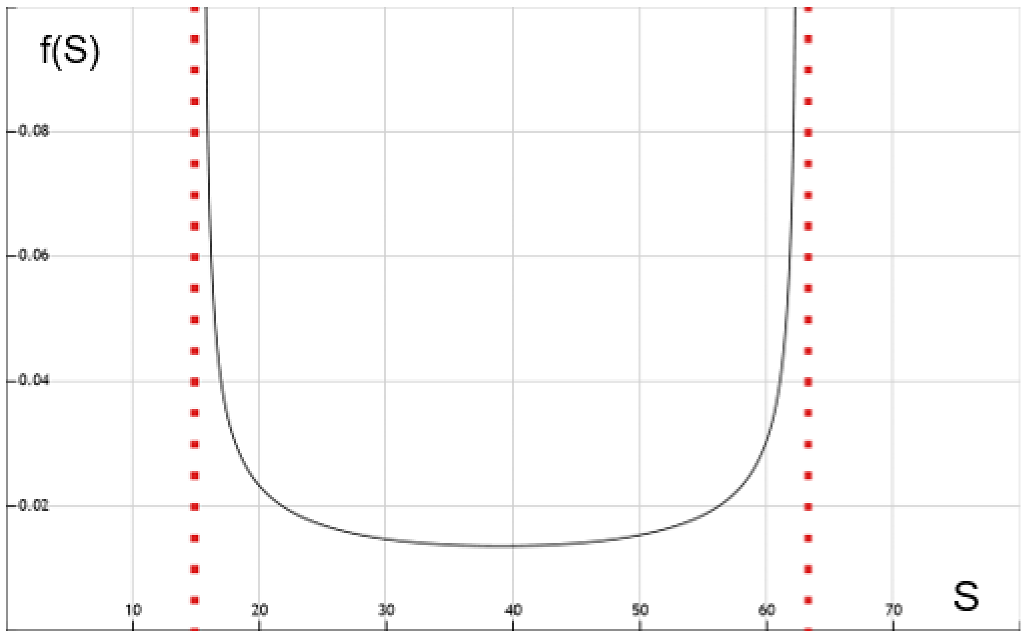
$$S = \frac{n\,(V(x) + V(y))}{2}$$

La segunda derivada que es positiva, confirma que, para ese valor de S, la Función de Probabilidad es mínima. Justamente en el valor de la esperanza de S.

Al reemplazar este valor de en la Función de Probabilidad se obtiene el valor mínimo:

$$f(S) = \frac{2}{n.\pi\sqrt{4\,(Cov\,(x,y))^2 + (V\,(x) - V\,(y))^2}}$$

En seguida se grafica la función de probabilidad de la suma de los cuadrados de las distancias ortogonales a las rectas que pasan por $p(\bar{x}, \bar{y})$ para los siguientes valores: V(x) = 9, V(y) = 4, Cov(x,y) = 3, n=6.



Grafica 17. Función de Probabilidad de la suma de los cuadrados de las distancias ortogonales a las rectas que pasan por cuando V(x)= 9 , V(y) = 4, Cov(x,y) =3, n=6, Nótese que la Función de Probabilidad para S mínimo = 14,813 y para S máximo 63,187 tiende a infinito y el mínimo valor de Función de Probabilidad corresponde al valor de S promedio los de las sumas de cuadrados de distancias descritas es decir 39, el valor mínimo es 0,0136.

6.2. Función de Distribución de Probabilidad de suma de distancias cuadradas ortogonales.

Se encuentra la Función de Distribución de Probabilidad de la suma de los cuadrados de las distancias ortogonales a las rectas que pasan por el centroide de un conjunto de puntos.

Para determinar la Función de Distribución de Probabilidad, bastará con integrar la Función de Probabilidad entre los límites de S mínimo y un valor S:

$$F(S) = \frac{1}{\pi} arc.sen \left[\frac{2S/n - (V(x) - V(y))}{\sqrt{4 (Cov(x,y))^2 + \left(V(x) - V(y)^2\right)}} \right]_{S1}^{S}$$

Donde S_1 es la suma de las distancias cuadradas mínimas es decir la correspondiente a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) y S es una suma de cuadrados de distancias ortogonales cualquiera, pero mayor o igual que la mínima y menor o igual a que la máxima.

$$F(S) = \frac{1}{\pi} arc.sen \left(\frac{2S - n(V(x) + V(y))}{n\sqrt{4 (Cov(x,y))^2 + (V(x) - V(y))^2}} \right) + \frac{1}{2}$$

Para:

$$S \geq n \left(\frac{V(x) + V(y) - \sqrt{4 (Cov(x,y))^2 + (V(x) - V(y))^2}}{2} \right)$$

$$S \leq n \left(\frac{V(x) + V(y) + \sqrt{4 (Cov(x,y))^2 + (V(x) - V(y))^2}}{2} \right)$$

Para valores inferiores al intervalo indicado la función toma valor de cero. Para valores superiores al intervalo la función toma el valor 1.

Está función tendrá un punto de inflexión en:

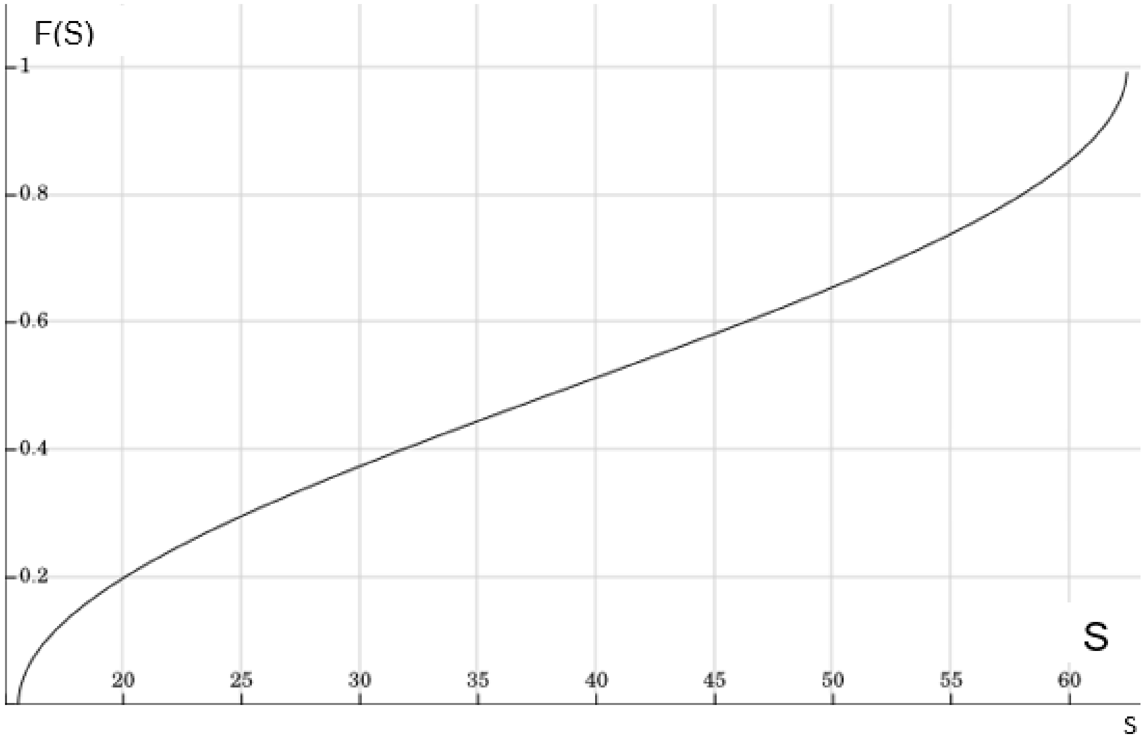
$$S = \frac{n(V(x) + V(y))}{2}$$

Puesto que, en este valor de S, la segunda derivada de la función es cero.

Para ese valor de suma de cuadrados ortogonales, la Función tendrá como valor ½.

Antes de este punto de inflexión la función será convexa (segunda derivada negativa) y a partir de dicho punto la función se torna cóncava (segunda derivada positiva).

En seguida se grafica la Función de Distribución de Probabilidad de la suma de los cuadrados de las distancias ortogonales a las rectas que pasan por $p(\bar{x}, \bar{y})$ para los siguientes valores: V(x) = 9, V(y) = 4, Cov(x,y) = 3, n=6.



Grafica 18.Función de Distribución de Probabilidad de la suma de los cuadrados de distancias ortogonales a las rectas que pasan por el centroide de un conjunto de puntos para el caso particular: V (x) = 9, V(y) = 4, Cov (x, y) = 3, n=6, nótese punto de inflexión en el punto de esperanza para S.

6.2.1. Aplicación.

Aplicación de la Función de Distribución de Probabilidad de la suma de cuadrados ortogonales a rectas que pasan por el centroide, a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO).

Se plantea la siguiente aplicación práctica: Dado un conjunto de puntos en el plano y considerando la familia de rectas que pasan por su centroide, se desea conocer el intervalo de pendientes alrededor de la pendiente de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) pertenecientes a rectas, que contengan el α (en tanto por uno) de las menores sumas de cuadrados ortogonales.

Finalmente Determínese si la pendiente obtenida mediante el método de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) está contenida en dicho intervalo.

$$F\left(S\right)=\alpha$$

$$\frac{1}{\pi}arc.sen\left(\frac{2S-n\left(V\left(x\right)+V\left(y\right)\right)}{n\sqrt{4\left(Cov\left(x,y\right)\right)^{2}+\left(V\left(x\right)-V\left(y\right)\right)^{2}}}\right)+\frac{1}{2}=\alpha$$

$$S=\frac{n}{2}\left(\sqrt{4\left(Cov\left(x,y\right)\right)^{2}+\left(V\left(x\right)-V\left(y\right)\right)^{2}}.sen\left(\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\pi\right)+V\left(x\right)+V\left(y\right)\right)$$

El intervalo de pendientes buscado estará definido por la solución de la siguiente ecuación de segundo grado:

$$S=n\left(\frac{b_1^2V\left(x\right)-2b_1Cov\left(x,y\right)+V\left(y\right)}{b_1^2+1}\right)$$

Resuélvase la aplicación descrita para el siguiente caso en particular:

V (x) = 9, V(y) = 4, Cov (x, y) = 3, n=6, α = 0,05.

El uso de las expresiones anotadas entrega los siguientes resultados:

S=15,85772237

La ecuación de segundo grado para determinar las pendientes es:

$$38,1423b_1^2-36b_1+8,14227=0$$

Cuyas soluciones son:

$$b_1=0,37578$$

$$b_1{}'=0,56806$$

El resultado de la pendiente de la recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales aplicando la expresión ya conocida es:

$$b=\frac{-\left(9-4\right)+\sqrt{\left(9-4\right)^{2}+4\left(3^{2}\right)}}{2\left(3\right)}=0,4684$$

Lo anterior indica que en las rectas de pendientes comprendidas en el intervalo: (0,37578 0,56806) se encuentra el 5% de las menores sumas de cuadrados de distancias ortogonales y en la Recta de pendiente 0,4684 (que corresponde a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO)) se encuentra la mínima suma de cuadrados de distancias ortogonales.

Llevando a ángulos formados con la horizontal dichas pendientes: el intervalo de ángulos formados con el eje X: (20,60° 29,60°) se encuentra el 5% de las menores sumas de cuadrados de distancias ortogonales y en 25,1° se encuentra la mínima suma de cuadrados de distancias ortogonales.

Es decir que, si se quiere contener el 5% de las menores sumas de cuadrados ortogonales, se debe hacer rotar en uno y otro sentido, la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales un ángulo de 4,5°.

Ahora se responderá el interrogante respecto a si la pendiente de la Recta de Mínimos Cuadrados Tradicionales pertenece al rango calculado.

Se sabe que la pendiente determinada por el método de Mínimos Cuadrados Tradicionales, es:

$$b = \frac{Cov\,(x, y)}{Var(x)} = \frac{3}{9} = 0,3333$$

Puede observarse que no se encuentra en el intervalo calculado. Está pendiente corresponde a un ángulo de 18,4° lo cual implica que la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) está rotada 6,7° en el sentido anti horario con respecto a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO).

6.3. Función de Probabilidad de la suma de los cuadrados de distancias verticales.

Se encuentra la Función de Probabilidad de la suma de los cuadrados de las distancias verticales de un conjunto de puntos a las rectas que pasan por el centroide de un conjunto de puntos**.**

La suma de los cuadrados de las distancias verticales a una recta que pasa por el centroide de un conjunto de puntos es:

$$S = \sum \left(y_i - (a + bx_i)\right)^2$$

Pero:

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

Reemplazando “a” y haciendo reducciones se llega a:

$$S = \sum \left(y_i - \bar{y}\right)^2 - 2b \sum \left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right) + b^2 \sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

O también:

$$S = n\left(b^2 V\,(x)\; - 2b.Cov\,(x, y) + V\,(y)\right)$$

$$S = n\left(V\,(x)\,tg^2\theta - 2Cov\,(x, y)\,tg\theta + V\,(y)\right)$$

Derivando implícitamente θ con respecto a S y luego despejando:

$$\frac{d\theta}{dS} = \frac{1}{2n\left(tg^2\theta + 1\right)\left(V\,(x)\,tg\theta - Cov\,(x, y)\right)}$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado aún no derivada, se obtiene:

$$tg\theta = \frac{Cov\left(x,y\right) \pm \sqrt{\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2 - V\left(x\right)\left(V\left(y\right) - S/n\right)}}{V\left(x\right)}$$

Lo que indica que existen dos valores de ángulo θ para una misma suma de cuadrados de distancias ortogonales S.

Reemplazando el primer valor de $tg\theta$ en la derivada y despejando el diferencial de θ:

$$d\theta = \frac{\left(V\left(x\right)\right)^2 dS}{2n\left(\left(2\left(Cov(x,y)\right)^2 + \left(V\left(x\right)\right)^2 - V\left(x\right)\left(V\left(y\right) - S/n\right)\right)\sqrt{\left(Cov(x,y)\right)^2 - V\left(x\right)\left(V\left(y\right) - S/n\right)} + 2Cov(x,y)\left(\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2 - V\left(x\right)\left(V\left(y\right) - S/n\right)\right)\right)}$$

Reemplazando el segundo valor de $tg\theta$ en la derivada y despejando el diferencial de θ:

$$d\theta = \frac{\left(V\left(x\right)\right)^2 dS}{2n\left(\left(2\left(Cov(x,y)\right)^2 + \left(V\left(x\right)\right)^2 - V\left(x\right)\left(V\left(y\right) - S/n\right)\right)\sqrt{\left(Cov(x,y)\right)^2 - V\left(x\right)\left(V\left(y\right) - S/n\right)} - 2Cov\left(x,y\right)\left(\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2 - V\left(x\right)\left(V\left(y\right) - S/n\right)\right)\right)}$$

.

Se debe interpretar que, para un mismo incremento de S, existen dos incrementos de θ.

El incremento de probabilidad de ocurrencia de la suma de cuadrados de distancias ortogonales es únicamente función del incremento del ángulo θ con respecto al incremento la dicha suma de cuadrados de distancias ortogonales.

Por lo tanto:

$$f(S) = k.\frac{d\theta}{dS}$$

Donde k es una constante.

Más adelante se comprueba que:

$$k = \frac{1}{\pi}$$

La Función de Probabilidad será: (escrita en dos líneas por la dificultad de hacerlo en una sola)

$$f\left(S\right) = \frac{\left(V\left(x\right)\right)^2}{2n\pi\left(\left(2\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2 + \left(V\left(x\right)\right)^2 - V\left(x\right)\left(V\left(y\right) - S/n\right)\right)\sqrt{\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2 - V\left(x\right)\left(V\left(y\right) - S/n\right)} + 2Cov(x,y)\left(\left(Cov(x,y)\right)^2 - V\left(x\right)\left(V\left(y\right) - S/n\right)\right)\right)}$$

$$+ \frac{\left(V\left(x\right)\right)^2}{2n\pi\left(\left(2\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2 + \left(V\left(x\right)\right)^2 - V\left(x\right)\left(V\left(y\right) - S/n\right)\right)\sqrt{\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2 - V\left(x\right)\left(V\left(y\right) - S/n\right)} - 2Cov(x,y)\left(\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2 - V\left(x\right)\left(V\left(y\right) - S/n\right)\right)\right)}$$

Intervalo de S para la Función de Probabilidad:

Para determinar el intervalo de S en la función de probabilidad, se tendrá en cuenta que el valor de la pendiente b de la recta de los mínimos cuadrados tradicionales es:

$$b = \frac{Cov\,(x,y)}{V\,(x)}$$

Reemplazando en:

$$S = n\left(b^2 V\,(x) - 2b.Cov\,(x,y) + V\,(y)\right)$$

Se obtiene S que corresponde al mínimo del intervalo:

$$S = n\left(\frac{V\,(x)\,V\,(y) - (Cov\,(x,y))^2}{V\,(x)}\right)$$

Es evidente que el valor máximo de S es infinito, (cuando la recta es vertical) por lo tanto la función de probabilidad expresada es válida para:

$$n\left(\frac{V\,(x)\,V\,(y) - (Cov\,(x,y))^2}{V\,(x)}\right) \leq S < \infty$$

La función de probabilidad será:

$$f\,(S) = 0$$

Cuando:

$$S < n\left(\frac{V\,(x)\,V\,(y) - (Cov\,(x,y))^2}{V\,(x)}\right)$$

Comprobación que la función encontrada es Función de Probabilidad.

Si la integral entre S mínimo e infinito de la Función de Probabilidad encontrada tiene valor de 1, se comprobará que efectivamente lo es.

Luego de un trabajo extenso con integrales definidas se puede llegar a la siguiente expresión de dicha integral:

$$\left[\frac{1}{\pi}\left(arc.tg\left(\frac{\sqrt{V\,(x)\,(S/n - V\,(y)) + (Cov(x,y))^2} + Cov(x,y)}{V\,(x)}\right) + arc.tg\left(\frac{\sqrt{V\,(x)\,(S/n - V\,(y)) + (Cov(x,y))^2} - Cov\,(x,y)}{V\,(x)}\right)\right)\right]_{Smin}^{\infty}$$

Donde:

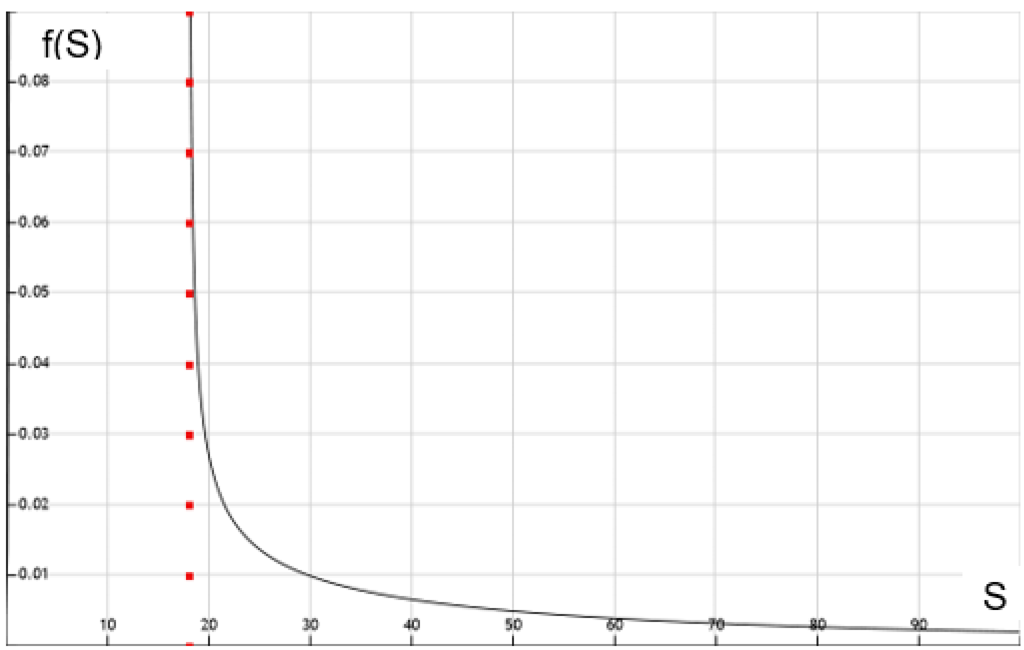
$$Smin = n\left(\frac{V\,(x)\,V\,(y) - (Cov\,(x,y))^2}{V\,(x)}\right)$$

Al aplicar los límites de integración se obtiene:

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\left(arc.tg\left(\frac{Cov\,(x,y)}{V\,(x)}\right)+arc.tg\left(-\frac{Cov\,(x,y)}{V\,(x)}\right)\right)\right)=1$$

Queda comprobado que se trata de una Función de Probabilidad.

En seguida se grafica la función de probabilidad de la suma de los cuadrados de las distancias verticales a las rectas que pasan por $p(\bar{x},\bar{y})$ para los siguientes valores: V(x) = 9, V(y) = 4, Cov(x,y) = 3, n=6.



Grafica 19. Función de Probabilidad de suma de cuadrados de distancias verticales a rectas que pasan por el centroide de un conjunto de puntos. Sea V(x) = 9, V(y) = 4, Cov (x, y) = 3, n=6. S mínimo = 18, S Max = infinito. f (S mínimo) = ∞, f (∞) =0.

6.4. Función de Distribución de Probabilidad de suma de distancias cuadrados verticales.

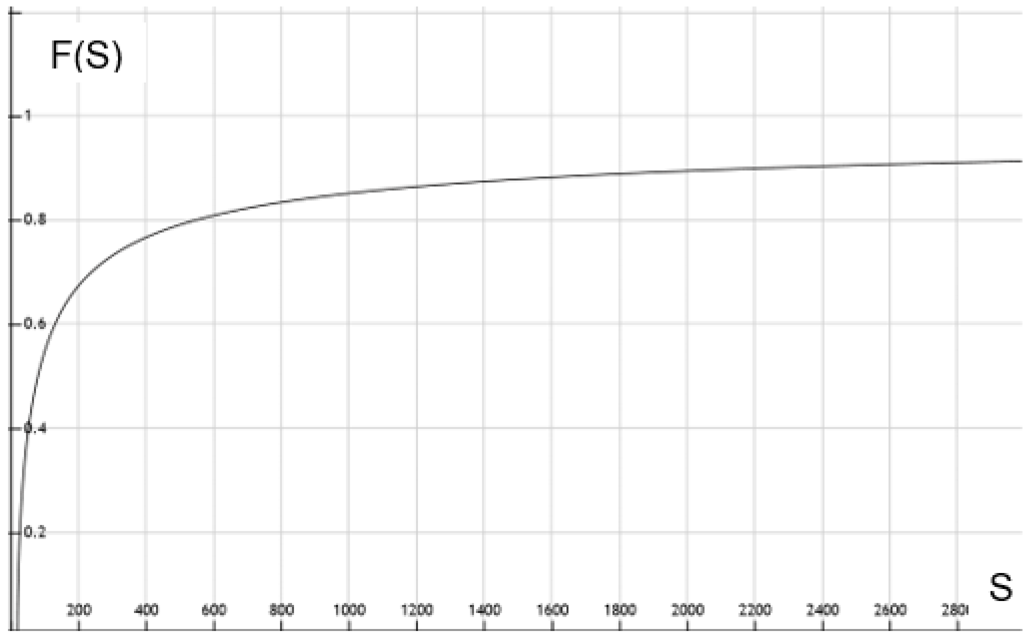
Se encuentra la Función de Distribución de Probabilidad de la suma de los cuadrados de las distancias verticales a las rectas que pasan por el centroide de un conjunto de puntos.

Al integrar la Función de Probabilidad entre el valor S_{min} y otro valor de S mayor que el anterior se obtiene la Función de Distribución de probabilidad, la cual se expresa como sigue:

$$F\,(S)=\frac{1}{\pi}\left(arc.tg\left(\frac{\sqrt{V\,(x)\,(S/n-V\,(y))+(Cov(x,y))^2}+Cov(x,y)}{V\,(x)}\right)+arc.tg\left(\frac{\sqrt{V\,(x)\,(S/n-V\,(y))+(Cov(x,y))^2}-Cov\,(x,y)}{V\,(x)}\right)\right)$$

Para valores inferiores a S_{min} la función toma valor de cero, y para $S = \infty$ la función tiene por valor 1.

En seguida se grafica la Función de Distribución de Probabilidad de la suma de los cuadrados de las distancias ortogonales a las rectas que pasan por $p(\bar{x}, \bar{y})$ para los siguientes valores: V(x) = 9, V(y) = 4, Cov(x,y) = 3, n=6



Grafica 20.Función de Distribución de Probabilidad de la suma de los cuadrados de las distancias verticales a las rectas que pasan por $p(\bar{x}, \bar{y})$ para los siguientes valores: V(x) = 9, V(y) = 4, Cov(x,y) = 3, n=6 . Nótese el crecimiento asintótico a medida que crece S, tendiendo a 1 cuando S tiende a infinito.

6.4.1. Aplicación.

Aplicación de la Función de Distribución de Probabilidad de suma de cuadrados distancias verticales a las rectas que pasan por el centroide, a la Recta de Mínimos Cuadrado Tradicional.

Se plantea la siguiente aplicación práctica: Dado un conjunto de puntos en el plano y considerando la familia de rectas que pasan por su centroide, se desea conocer el intervalo de pendientes alrededor de la pendiente de la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) pertenecientes a rectas que contengan el α (en tanto por uno) de las menores sumas de cuadrados verticales. Finalmente determínese si la pendiente obtenida mediante el método de Mínimos Cuadrados Ortogonales está contenida en dicho intervalo.

$F(S) = \alpha$

El valor de S, será la solución positiva de la ecuación:

$$\alpha = \frac{1}{\pi}\left(arctg\left(\frac{\sqrt{V(x)\left(\frac{S}{n} - V(y)\right) + (Cov(x,y))^2} + Cov(x,y)}{V(x)}\right) + arctg\left(\frac{\sqrt{V(x)\left(\frac{S}{n} - V(y)\right) + (Cov(x,y))^2} - Cov(x,y)}{V(x)}\right)\right)$$

Obtenido el valor de S, el intervalo de pendientes buscado estará definido por las soluciones de pendiente de la siguiente ecuación de segundo grado:

$$S = n\left(b_1^2.V(x) - 2b_1 Cov(x,y) + V(y)\right)$$

Resuélvase la aplicación descrita para el siguiente caso en particular:

V (x) = 9, V(y) = 4, Cov (x, y) = 3, n=6, α = 0,05.

El uso de las expresiones anotadas entrega los siguientes resultados:

$$0,05 = \frac{1}{\pi}\left(arc.tg\left(\frac{\sqrt{9(S/n-4)+3^2}+3}{9}\right) + arc.tg\left(\frac{\sqrt{9(S/n-4)+3^2}-3}{9}\right)\right)$$

S= 18,41236668.

La ecuación resultante de segundo grado para pendientes será:

$$9b_1^2 - 6b_1 + 0,93127222 = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$b_1 = 0,24595$$

$$b_1{}' = 0,42072$$

El resultado de la pendiente de la recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) aplicando la expresión ya conocida es:

$$b = \frac{Cov(x,y)}{V(x)} = 3/9 = 0,33333$$

Lo anterior indica que en las rectas de pendientes comprendidas en el intervalo: (0,24595 0,42072) se encuentra el 5% de las menores sumas de cuadrados de distancias verticales y en la recta de pendiente 0,33333 (que corresponde a la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV)) se encuentra la mínima suma de cuadrados de distancias verticales.

Llevando a ángulos formados con la horizontal dichas pendientes: en el intervalo de ángulos formados con el eje X: (13,8° 22,8°) se encuentra el 5% de las menores sumas de cuadrados de distancias verticales y en 18,3° se encuentra la mínima suma de cuadrados de distancias verticales.

Es decir que, si se quiere contener el 5% de las menores sumas de cuadrados de distancias verticales, se debe hacer rotar en uno y otro sentido, la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) un ángulo de 4,5°.

Ahora se responderá el interrogante respecto a si la pendiente de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) pertenece al rango calculado.

Se sabe que la pendiente determinada por el método de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) es:

$$b = \frac{-(9-4) + \sqrt{(9-4)^2 + 4(3^2)}}{2(3)} = 0,4684$$

Puede observarse que no se encuentra en el intervalo calculado. Está pendiente corresponde a un ángulo de 25,1° lo cual implica que la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) está rotada 6,8° en el sentido anti horario con respecto a la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV).

CAPÍTULO 7

RELACIÓN ENTRE SUMAS DE CUADRADOS DE DISTANCIAS VERTICALES Y ORTOGONALES

En este capítulo se estudia la relación entre la suma de cuadrados de distancias verticales a las rectas que pasan por el centroide del conjunto de puntos y la suma de distancias cuadrados ortogonales a dichas rectas.

La relación se definirá de la siguiente manera:

Sea Sv la suma de los cuadrados de distancias verticales a una recta que pasa por centroide de los puntos.

Sea So la suma de los cuadrados de distancias ortogonales a la misma recta

$$Relacion = \frac{S_v}{S_o} = \frac{n\left(V\left(x\right)tg^2\theta - 2.Cov(x,y)tg\theta + V\left(y\right)\right)}{\frac{n(V(x)tg^2\theta - 2.Cov(x,y)tg\theta + V(y))}{sec^2\theta}} = sec^2\theta$$

Por lo tanto:

$$S_v = sec^2\theta . S_o$$

Cómo:

$$sec^2\theta \geq 0$$

$$S_v \geq S_o$$

La anterior es una conclusión importante, puesto que significa que para una recta que pasa por el centroide de los puntos, la suma de cuadrados de distancias verticales (tradicional) es mayor o igual a la suma de cuadrados ortogonales.

En otras palabras, y sin ser el objeto primordial del presente estudio el ajuste, en el caso de rectas de mínimos cuadrados, La suma de cuadrados del error cuando se usan los residuos verticales, es mayor a la suma de cuadrados del error cuando se usan los residuos ortogonales. Sin importar cuál de los dos métodos se empleó para definir la recta.

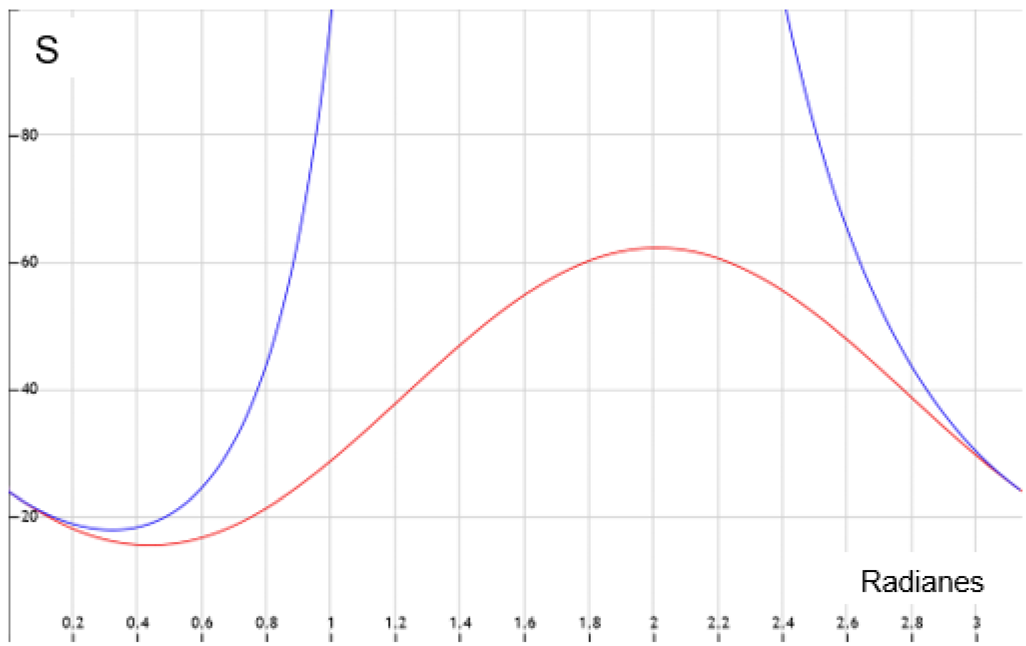
Llámese SCE_v a la suma de cuadrados del error cuando los residuales son verticales.

Llámese SCE_o a la suma de cuadrados del error cuando los residuales son ortogonales.

$$SCE_v = sec^2\theta . SCE_o$$

$$SCE_v \geq SCE_o$$

En la gráfica siguiente, se ilustra las diferencias entre la suma de cuadrados de distancias ortogonales y suma de cuadrados de distancias verticales a rectas que pasan por el centroide de los puntos en función del ángulo θ que las rectas forman con la horizontal, se podrá visualizar la diferencia en dicho ángulo cuando la Recta de Mínimos Cuadrados se establece por el método tradicional (RMCV) y cuando se calcula mediante suma de cuadrados de distancias ortogonales (RMCO).



Grafica 21. Diferencias entre la suma de cuadrados de distancias ortogonales y suma de cuadrados de distancias verticales a rectas que pasan por el centroide un conjunto de puntos en función del ángulo θ que las rectas forman con la horizontal Se tiene n=6, V(x)=9, V(y)=4, Cov (x, y) = 3. En la abscisa aparece el ángulo en radianes (entre 0 y π) de las rectas que pasan por el centroide de los puntos, en las ordenadas la suma de cuadrados de distancias verticales (azul) y ortogonales (rojo). Puede observarse la Mínima Suma de cuadrados de distancias y la inclinación correspondiente para la recta de mínimos cuadrados en cada una de las dos modalidades, y la suma de cuadrados de distancias e inclinación para a recta de máximos cuadrados por método ortogonal. Se cumple siempre que $S_v \geq S_o$.

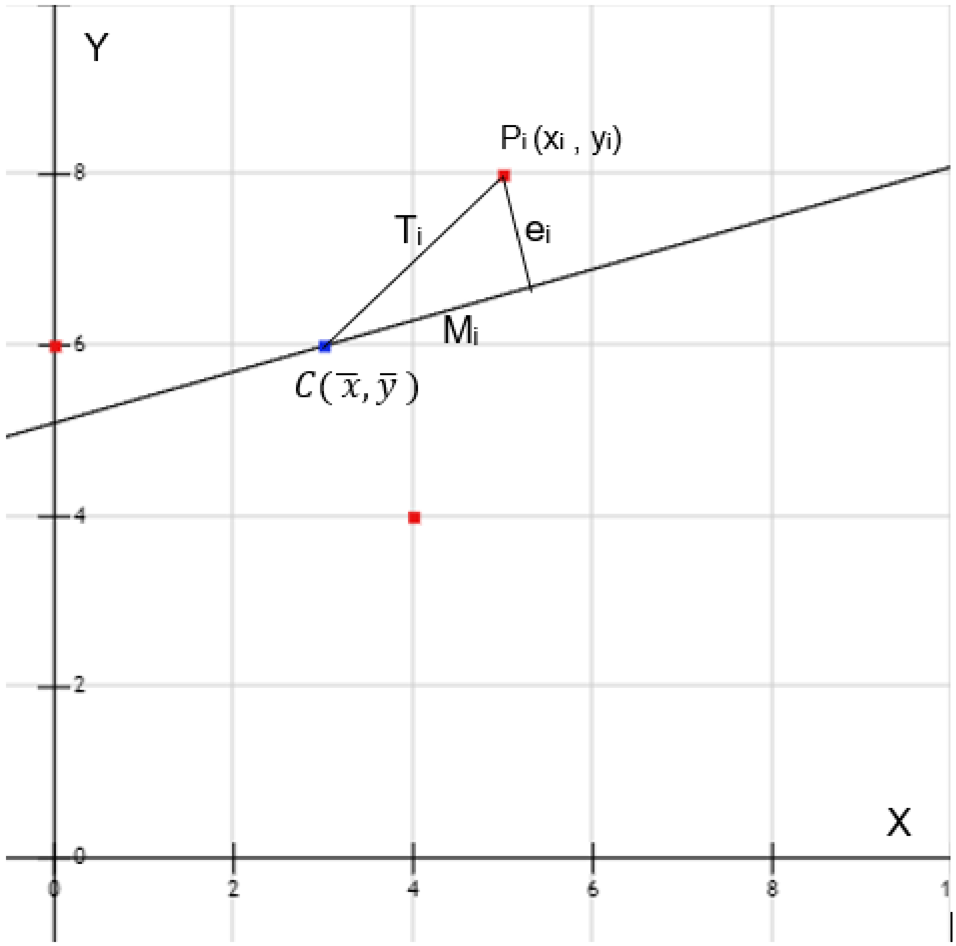
CAPÍTULO 8

COMPARACIÓN DE COEFICIENTES DE DETERMINACIÓN R^2

Se realiza una comparación de los coeficientes de determinación R^2 entre la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) y la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO).

El objetivo general del presente estudio es la comparación entre la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) y la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) y no el ajuste de las respectivas regresiones, sin embargo los aspectos teóricos logrados el el desarrollo de este trabajo permiten realizar una comparacion interesante en los valores de R^2 .

Cuando se trata de Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales, la relacion entre SCT (Suma de cuadrados totales), SCM (Suma de cuadrados del Modelo (Regresión)) y SCE (Suma de Cuadrados del error) tiene una interpretación geométrica evidente que se ilustra en la grafica:



Grafica 22. Interpretación geométrica SCTo=SCMo + SCEo como sumatoria de los efectos en cada punto i: $Ti^2 = Mi^2 + ei^2$

$$T_i^2 = M_i^2 + e_i^2$$

Si se establece igual relación para todos los puntos y se realiza la sumatoria:

$$SCT_o = SCM_o + SCE_o$$

$$T_i = \sqrt{(y_i - \bar{y})^2 - (x_i - \bar{x})^2}$$

$$SCT_o = n(V(x) + V(y))$$

$$R_o^2 = 1 - \frac{SCE_o}{SCT_o}$$

$$R_o^2 = 1 - \frac{SCE_o}{n(V(x) + V(y))}$$

Se sabe que el Coeficiente de Determinación R^2 para la Recta de Mínimos Cuadrados Tradicional es:

$$R_v^2 = 1 - \frac{SCE_v}{SCT_v}$$

Donde:

$$SCT_v = n.V\left(y\right)$$

De acuerdo a Capítulo 7:

$$SCE_v = sec^2\theta.SCE_o$$

Por lo tanto:

$$R_v^2 = 1 - \frac{SCE_o.Sec^2\theta}{nV\left(y\right)}$$

Si se hace la diferencia:

$$R_o^2 - R_v^2$$

Se obtiene:

$$R_o^2 - R_v^2 = \frac{SCE_o Sec^2\theta}{nV\left(y\right)} - \frac{SCE_o}{n\left(V\left(x\right) + V\left(y\right)\right)}$$

$$R_o^2 = R_v^2 + \frac{SCE_o}{n}\left(\frac{sec^2\theta\left(V\left(x\right) + V\left(y\right)\right) - V\left(y\right)}{V\left(y\right)\left(V\left(x\right) + V\left(y\right)\right)}\right)$$

Es evidente que:

$$\frac{SCE_o}{n}\left(\frac{sec^2\theta\left(V\left(x\right) + V\left(y\right)\right) - V\left(y\right)}{V\left(y\right)\left(V\left(x\right) + V\left(y\right)\right)}\right) \geq 0$$

Por lo tanto:

$$R_o^2 \geq R_v^2$$

Siempre habrá que tener en cuenta que :

$$sec^2 = 1 + b^2$$

La anterior es una conclusión muy importante por que indica que la calidad del modelo de regresión ortogonal es superior al modelo de regresión tradicional puesto que el modelo ortogonal explica mayor porcentaje de la variabilidad que el otro. Lo anterior sin importar si los parámetros “a” y “b” se determinaron por cualquiera de las dos modalidades de regresión que se está estudiando.

En general se puede tambíen expresar lo dicho, de la siguiente manera:

$$R_o^2 = R_v^2 + \frac{SCE_o}{n}\left(\frac{1+b^2}{V\left(y\right)} - \frac{1}{V\left(x\right)+V\left(y\right)}\right)$$

A continuación se precisarán las pautas para encontrar dicha diferencia bajo dos circunstancias:

Primera Circunstancia:

Los parámetros "a" y "b" de la recta de regresión se determinaron bajo la modalidad de Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO):

Se empleará para la diferencia.

$$b = \frac{-\left(V\left(x\right)-V\left(y\right)\right)+\sqrt{\left(V\left(x\right)-V\left(y\right)\right)^2+4.\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2}}{2.Cov\left(x,y\right)}$$

$$SCE_o = n\left(\frac{V\left(x\right)+V\left(y\right)-\sqrt{4\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2+\left(V\left(x\right)-V\left(y\right)\right)^2}}{2}\right)$$

Segunda Circunstancia:

Los parámetros "a" y "b" de la recta de regresión se determinaron bajo la modalidad de Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (SMCV):

Se empleará para la diferencia:

$$b = \frac{Cov\left(x,y\right)}{V\left(x\right)}$$

$$SCE_o = n\left(\frac{V\left(x\right)V\left(y\right)-\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2}{V\left(x\right)\left(1+b^2\right)}\right)$$

$$SCE_o = n\left(\frac{V\left(x\right)\left(V\left(x\right)V\left(y\right)-\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2\right)}{\left(V\left(x\right)\right)^2+\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2}\right)$$

CAPÍTULO 9

ADAPTACIÓN DE INTERVALOS DE CONFIANZA DE PARÁMETROS DE LA RECTA DE MÍNIMOS CUADRADOS ORTOGONALES (RMCO)

En la Introducción se aclaró que no es el objeto primordial de este trabajo el ajuste de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales, no obstante la teoría desarrollada permite expresar los intervalos de confianza para los parámetros, en función de la suma de cuadrados de distancias ortogonales y la nomenclatura adopatada en este trabajo, obteniendose novedosas fórmulas simplificadas.

En el ítem 1.4 se escribieron las expresiones que Minitab Suport en "Methods and formulas for Orthogonal Regressión" utiliza en su software para determinar intervalos de confianza para los parámetros.

En 4.1 se encontro la suma de cuadrados de distancias ortogonales a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales, llamaremos a esa suma $S_{min.}$

En este aparte del estudio, se considera que el conjunto de puntos es una muestra y por lo tanto los parametros obtenidos a y b deben interpretarse como estimados.

$$S_{min} = n\left(\frac{V(x) + V(y) - \sqrt{(V(x) - V(y))^2 + 4(Cov(x,y))^2}}{2}\right)$$

Trabajando estas expresiones se puede demostrar que las fórmulas usadas por Minitab: tienen las siguientes identidades:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{S_{min}}{n-1}$$

$$S_{vv} = \frac{(1+b^2)\,S_{min}}{n-2}$$

$$\hat{\sigma}_{xx} = \frac{nV(x) - S_{min}}{n-1}$$

Estas identidades nuevas aplicadas a las expresiones originales producen estos resultados:

$$V(b) = \frac{S_{min}\left(\frac{n.V(x)\left(1+b^2\right)}{n-2} - \frac{b^2.S_{min}}{n-1}\right)}{(nV(x) - S_{min})^2}$$

Pero facilmente puede demostrarse que:

$S_{min} = n\left(V(y) - b.Cov(x,y)\right)$

La varianza del parámetro de pendiente podrá expresarse asi:

$$V(b) = \frac{\left(V(y) - b.Cov(x,y)\right)\left(\frac{V(x)\left(1+b^2\right)}{n-2} - \frac{b^2\left(V(y)-b.Cov(x,y)\right)}{n-1}\right)}{\left(V(x) - V(y) + b.Cov(x,y)\right)^2}$$

Intérvalo para b (pendiente) cuando las muestras son grandes.:

$$b \pm Z_{(1-\alpha/2)}\sqrt{V(b)}$$

De otra parte el intervalo para el intercepto puede expresarse así::

$$V(a) = \frac{(1+b^2)\,S_{min}}{n\,(n-2)} + \bar{x}^2 V(b)$$

$$V(a) = \frac{(1+b^2)\left(V(y) - b.Cov(x,y)\right)}{n-2} + \bar{x}^2.V(b)$$

Intervalo para a (intercepto) :

$$a \pm Z_{(1-\alpha/2)}\sqrt{V(a)}$$

CAPÍTULO 10

COMPARACIÓN DE LA VARIANZA DEL PARÁMETRO DE PENDIENTE

Se realiza un estudio compararivo de valores de la varianza del parámetro de pendiente de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) y de la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) en función del coeficiente de correlación.

Cónsiderese la expresion de varianza del parametro de pendiente de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales:

$$V(b) = \frac{\left(V(y) - b.Cov(x,y)\right)\left(\frac{V(x)\left(1+b^2\right)}{n-2} - \frac{b^2\left(V(y)-b.Cov(x,y)\right)}{n-1}\right)}{\left(V(x) - V(y) + b.Cov(x,y)\right)^2}$$

Es obvio que cuando el coeficiente de correlación es ± 1 los puntos están situados en una linea recta y por lo tanto no hay varianza en el parámetro de pendiente. Esto puede corroborarse aún más si se tiene en cuenta que el primer factor de la expresión del numerador es la mínima suma de cuadrados de distancias ortogonales y bajo la condición del coeficiente de correlación anotada, el factor es cero y vuelve a la varianza cero.

En conclusión la varianza mínima para el parámetro de pendiente se produce cuando en coeficiente de correlación es ± 1 . Esa varianza mínima es cero.

La varianza máxima del parámetro de pendiente se producirá cuando el coeficiente de correlación sea cero.

Bajo esta condición de coeficiente de correlacion cero deben considerarse dos situaciones:

Primera situación:

$V(x) \geq V(y)$

El trabajo de aplicación de límites en la expresión de varianza entregará el siguiente resultado

$$V(b) = \frac{V(x)\,V(y)}{(n-2)\left(V(x) - V(y)\right)^2}$$

Segunda situación:

$V(x) < V(y)$

El trabajo de aplicación de límites en la expresión de varianza entregará el siguiente resultado

$$V\left(b\right) \rightarrow \infty$$

En la recta de mínimos Cuadrados Tradicional, la varianza de la pendiente “b” viene expresada de la siguiente manera :

$$V(b) = \frac{SCE_v}{n\left(n-2\right)V\left(x\right)}$$

(Está expresión se obtiene si se trabaja adecuadamente la teoría desarrollada por Canavos G.C. [8])

Pero aplicada a las expresiones desarrolladas en el presente estudio (ver 4.2)

$$SCE_v = n\left(\frac{V\left(x\right).V\left(y\right) - \left(Cov\left(x,y\right)\right)^2}{V\left(x\right)}\right)$$

Se llega a:

$$V(b) = \frac{V\left(x\right)V\left(y\right) - \left(Cov\left(x,y\right)\right)^2}{\left(n-2\right)\left(V\left(x\right)\right)^2}$$

Analizando esta ultima expresión es facil concluir que el valor mínimo de esta varianza se encuentra en coeficiente de correlación = ±1

$$V\left(b\right) = 0$$

Y el valor máximo cuando el coeficiente de correlación es cero

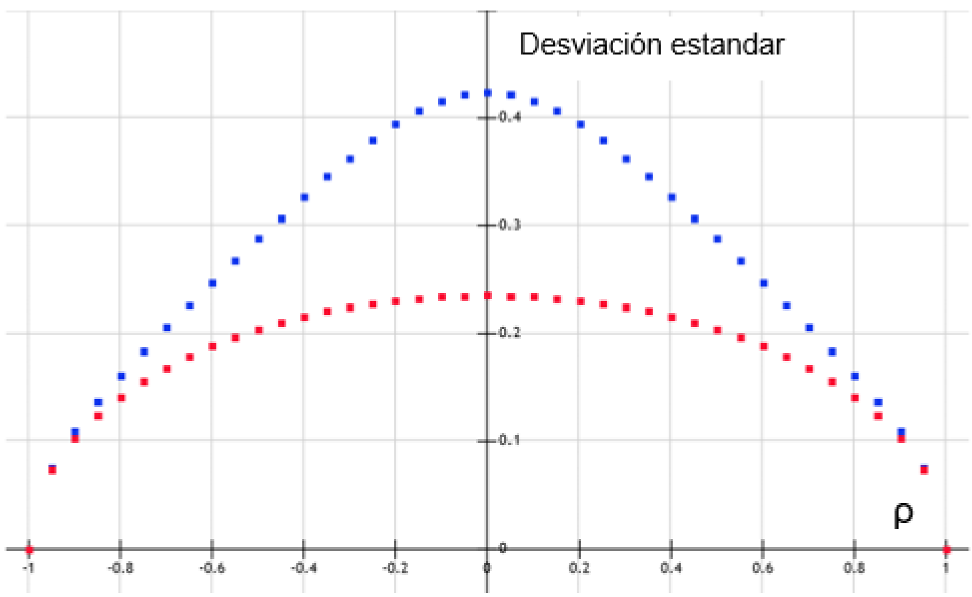
$$V(b) = \frac{V\left(y\right)}{\left(n-2\right)V\left(x\right)}$$

Tabla comparativa resumen de varianzas del parámetro de pendiente entre Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales y Mínimos Cuadrados Tradicionales en función del coeficiente de correlación:

ρ	R.M.C O. V(x)>V(y)	R.M.C.O V(x)< V(y)	R.M.C. V.	
$\rho = 0$	$V(b) = \dfrac{V(x)V(y)}{(n-2)(V(x)-V(y))^2}$	$V(b) \rightarrow \infty$	$V(b) = \dfrac{V(y)}{(n-2)V(x)}$	Máximo
$\rho = \pm 1$	$V(b) = 0$	$V(b) = 0$	$V(b) = 0$	Mínimo

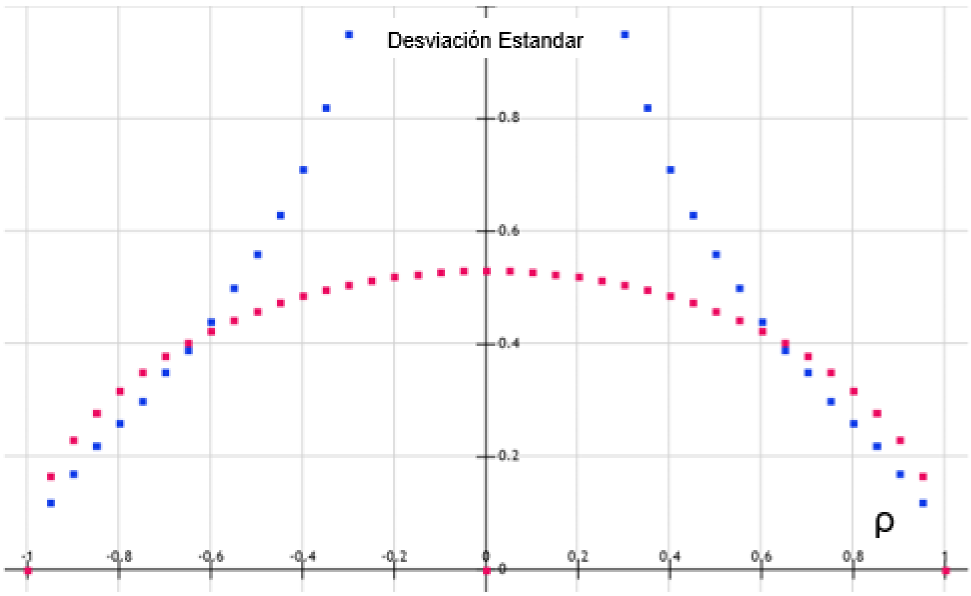
En seguida se presentarán dos gráficas que comparan las desviaciones estandar de los parametros "b" de pendiente entre la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales y Mínimos Cuadrados Tradicional en función de los coeficientes de correlación:

Se considerará inicialmente la comparación cuando V(x)>V(y) :



Grafica 23.Comparación entre desviaciones estándar de parámetro de pendiente entre Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales y Mínimos Cuadrados Tradicionales cuando V(x)>V(y): Sea n=10, V(x) = 9, V(y) =4. Línea azul: Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales. Línea Roja: Recta de Mínimos Cuadrados Verticales. Nótese que para correlaciones altas no existe mucha diferencia, a medida que la correlación es baja, la desviación estándar del parámetro de pendiente es mayor en la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales.

Ahora considérese la comparación cuando V(x)< V(y) :



Grafica 24.Comparación entre desviaciones estándar de parámetro de pendiente entre Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales y Mínimos Cuadrados Tradicionales cuando V(x)< V(y): Sea n=10, V(x) =4, V(y) =9. Línea azul: Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales. Línea Roja: Recta de Mínimos Cuadrados Tradicionales. Nótese que para correlaciones altas no existe mucha diferencia, a medida que la correlación es baja, la desviación estándar del parámetro de pendiente es mayor en la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales.

CAPÍTULO 11

NOVEDOSA AGUJA DE BUFFON

Se tienen n puntos en el plano, se determina el centroide de estos puntos, se hace rotar aleatoriamente una aguja de longitud lo suficientemente larga alrededor de dicho centroide.

La probabilidad que la suma de cuadrados de distancias ortogonales desde los puntos a la aguja sea inferior a S, de acuerdo a lo expuesto en 4.11 viene dada por la Función de distribución de probabilidad :

$$F(S) = \frac{1}{\pi} arc.sen \left(\frac{2S - n\left(V\left(x\right) + V\left(y\right)\right)}{n\sqrt{4\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2 + \left(V\left(x\right) - V\left(y\right)\right)^2}} \right) + \frac{1}{2}$$

Para los siguientes valores de S:

$$S \geq n \left(\frac{V\left(x\right) + V\left(y\right) - \sqrt{4\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2 + \left(V\left(x\right) - V\left(y\right)\right)^2}}{2} \right)$$

$$S \leq n \left(\frac{V\left(x\right) + V\left(y\right) + \sqrt{4\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2 + \left(V\left(x\right) - V\left(y\right)\right)^2}}{2} \right)$$

Sea:

$$\epsilon = \frac{2S - n\left(V\left(x\right) + V\left(y\right)\right)}{n\sqrt{4\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2 + \left(V\left(x\right) - V\left(y\right)\right)^2}}$$

Siendo epsilon un valor positivo muy pequeño:

$$\epsilon > 0$$

$$F(S) = \frac{1}{\pi} arc.sen\left(\epsilon\right) + \frac{1}{2}$$

Pero para los valores de epsilon se sabe que:

$$\epsilon \approx arc.sen\left(\epsilon\right)$$

Entre más pequeño sea epsilon la aproximación será mayor.

$$F(S) = \frac{\epsilon}{\pi} + \frac{1}{2}$$

Despejando π:

$$\pi = \frac{\epsilon}{F\left(S\right) - \frac{1}{2}}$$

Se encontrará el valor de S en función de epsilon

$$S = \frac{n}{2}\left(\epsilon.\sqrt{4\left(Cov\left(x,y\right)\right)^2 + \left(V\left(x\right) - V\left(y\right)\right)^2} + V\left(x\right) + V\left(y\right)\right)$$

Se ha encontrado una manera experimental de determinar el valor del número π tan preciso como se desee.

Bastará escoger un valor epsilon pequeño, en función de epsilon se determinará S, luego se hará girar como una ruleta N veces la aguja, en cada ensayo se calculara la suma de cuadrados de distancias ortogonales desde el conjunto de puntos hasta a aguja, si ese valor es menor que S, se anotará un éxito.

La suma de cuadrados de distancias ortogonales para cada inclinación de la aguja, se podrá calcular con la aplicación de la expresión: (ver 9.4.1)

$$S(\theta) = n\left(\frac{V\left(x\right)tg^2\theta - 2Cov\left(x,y\right)tg\theta + V\left(y\right)}{sec^2\theta}\right)$$

N será un número grande.

Llámese x al número de éxitos, por lo tanto:

$$F\left(S\right) = \frac{x}{N}$$

Con los datos anteriores se habrá estimado con la precisión deseada el número π.

11.1 Simulaciones.

Podrá recurrirse a la simulación, siendo recomendable utilizar un programa computacional que genere números aleatorios de una distribucion uniforme, estos números se transformaran en inclinaciones de la aguja con respecto a la horizontal en cada ensayo.

Surge una dificultad en la simulación consistente en las limitaciones de muchos paquetes informaticos, los cuales no tienen la capacidad de generar números absoluta y totalmente aleatorios y uniformes. En general la sucesión de números aleatorios dependen de una semilla inicial e incluyen algoritmos que implicitamente significan algún grado de determinismo. Estas circuntancias se ponen claramente de manifiesto cuando al producir una cantidad muy grande de números en distribución uniforme su media no se ubica en el promedio de los valores extremos del intervalo.

No obstante lo dicho se realiza a manera de aplicación una simulación con un elemental computador doméstico, empleando el programa Matlab.

Simulación 1:

Se considerará un conjunto de 10 puntos con: V(x) = 10, Cov(x,y) = 6, V(y) = 7. Se tomará un valor epsilon = 0,03

El valor de S, por debajo del cual se calculará la probabilidad, luego de realizar sencillas reducciones será:

$$S = 0,03 * 5\sqrt{145} + 75$$

Por su parte la suma de cuadrados de distancias ortogonales para cada inclinación θ se expresará:

$$S(\theta) = 10\left(\frac{8tg^2\theta - 12tg\theta + 7}{sec^2\theta}\right)$$

Aleatoriamente se generarán 1.500.000.000 angulos θ, el resultado para la estimación de π es la siguiente:

π =3,1416663

Que es un valor muy aproximado , si se tiene en cuenta las dificultades anotadas y que se ha escogido un valor de epsilon no tan pequeño.

```
format long
k=0;
u=1500000000;
SI=0.03*5*(145)^0.5+75;

for i=1:u
    j=rand(1);
teta=j*pi;

S=10*(8*(tan(teta))^2-2*6*tan(teta)+7)/((sec(teta))^2);

if SI>S
    k=k+1;
else
end
end


P=k/u
PI=.03/((P-0.5))
```

```
P =

   0.509549082666667


PI =

   3.141663031646186

simulation
```

Grafica 25. Simulación en Matlab para obtener el número π: ξ =0,03, ensayando 1.500.000.000 inclinaciones aleatorias de θ con respecto a la horizontal, distribuidas uniformemente.

Simulación 2:

Una mejor manera de acercarse a π, es obtener la probabilidad F(S), generando sistematicamente los ángulos θ igualmente espaciados. Se empleará el mismo conjunto de puntos.

En seguida se aplica este procedimiento, empleando: ξ = 0,00009, se generaran 100.000.000.000 de ángulos θ igualmente espaciados.

El resultado obtenido para π es el siguiente.

Π = 3,14159263 que es un valor con mucha aproximación.

Ensayos con ξ muy pequeños y computadoras con mayor precisión en sus operaciones, permitiran obtener valores mas precisos como se deseen.

```
format long
k=0;
u=100000000000;
SI=0.00009*5*(145)^0.5+75;

for i=1:u

theta=i*pi/u;

S=10*(8*(tan(theta))^2-2*6*tan(theta)+7)/((sec(theta))^2);

if SI>S
    k=k+1;
else
end
end


P=k/u;
PI=.00009/((P-0.5))
```

```
PI =

   3.141592626890351

>>
```

Grafica 26.Simulación en Matlab para obtener el número π: ξ =0,0009, ensayando 100.000.000.000 inclinaciones igualmente espaciadas de θ con respecto a la horizontal.

CONCLUSIONES

La Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) en el plano, es la recta que geométricamente se acerca más a un conjunto de puntos. Desde el punto de vista estadístico tiene justificación plena cuandolas varianzas de los errores en las dos variables se consideran iguales. Por lo tanto su elección sobre la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) será el resultado del análisis, el diseño y la medición de las variables involucradas.

Se presenta en este trabajo un procedimiento inédito que contempla las minimización de la suma de cuadrados de distancias euclideas desde un conjunto de puntos hasta un hiperplano y deduce expresiones generales en $\mathbb{R}^m$ para luego particularizarse en $\mathbb{R}^2$ y obtener los parámetros de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) todas las expresiones obtenidas y los desarrollos se presentan en una forma vectorial y matricial de sencilla aplicación.

Cuando se emplea el método de Mínimos Cuadrados Ortogonales, la ecuación para encontrar la pendiente resulta ser de segundo grado. En general se obtendrán dos resultados, uno de ellos corresponderá a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) y el segundo a aquel lugar geométrico que se denominó : “Recta de Máximos Cuadrados Ortogonales” que corresponde a la recta que geometricamente se aleja más de un conjunto de puntos. Esta recta podrá ser util, cuando se trata de diseñar una trayectoria que debiendo pasar por el centroide de los puntos se distancie lo máximo posible de los mismos, esto ocurre en diseño de obras de ingenieria de lineas de suministro rectilineas que si bien deben nutrir o ser tributarias de viviendas deben distanciarse de las mismas: lineas de conducción eléctrica, alcantarillados. Otra propuesta útil es el empleo en el lanzamiento rectilineo de un elemento o partícula cuando se desea evitar colisiones o ingreso en campos electromagneticos de estructuras puntifomes.

El estudio de la Rectas de Mínimos Cuadrados, permite adicionalmente establecer otras rectas que pasando por el centroide se separan en promedio una suma de cuadrados de distancias escogidas de acuerdo al proyecto que se desee, en el presente trabajo se determinaron rectas notables que en promedio se distanciaban varianza de x y varianza de y. Para la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO), Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) y otras rectas notables se establecieron relaciones geométrico matemáticas. Adicionalmente se describieron propiedes para estos lugares geométricos.

Para todos los casos posibles se establecieron con minuciosidad las diferencias angulares entre la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) y Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO), demostrando que para ciertas condiciones, el desfase es alarmante, alcanzando valores de $\pi/2$, razón mas que suficiente para elegir adecuadamente el tipo de recta de regresión que se debe emplear. Para aumentar la información en la discrepancia de las pendientes, se presentó una “Recta de Mínimos Cuadrados Horizontales” y se encontrarón relaciones entre las tres rectas (Mínimos

Cuadrados Tradicionales, Mínimos Cuadrados Horizontales y Mínimos Cuadrados Ortogonales, llegando a la conclusión que en valores absolutos la pendiente menor correspondía a al método Tradicional (RMCV), la intermedia pertenecía al método ortogonal (RMCO) y la mayor al metodo horizontal.

Se estudió la diferencia de sumas de cuadrados de distancias ortogonales entre la Recta de Máximos Cuadrados Ortogonales y la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) encontrando que tal diferencia es mayor cuando el coeficiente de correlación tiene valor ±1 y mínima cuando dicho coeficiente es cero. La utilidad práctica para este hallazgo es la confirmación que si al rotar sobre el centroide de unos puntos una linea recta, la ganancia en disminución o aumento de la suma de cuadrados de distancias (de acuerdo a la necesidad de un problema real aplicado) es mejor si el coeficiente de correlación es alto en valor absoluto y dicha ganancia no es buena cuando el coeficiente de correlación tiene un valor bajo en valor absoluto.

Detalladamente y bajo todos los escenarios, se analizó la diferencia entre suma de cuadrados de distancias verticales a la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) y suma de cuadrado de distancias perpendiculares a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) y se demostró que la Suma de distancias cuadradas ortogonales a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) es menor o igual a la suma de distacias cuadradas verticales a la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV), determinandose máximos y mínimos en cada caso en función del coeficiente de correlación. Esta circunstancia es importante porque es indicativo que la suma de cuadrados de error será menor en la recta definida por las distancias cuadradas ortogonales (RMCO) es que en la recta tradicional (RMCV) , También se demostró que la varianza de las distancias cuadradas ortogonales a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) es menor o igual a la varianza de las distancias verticales a la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV).

En este trabajo se argumenta la importancia práctica no solo de la suma de distancias cuadradas ortogonales a la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO), sino también a todas las rectas que pasan por el centroide del conjunto de puntos, es por ello que se determinó la esperanza y la varianza de dicha suma a esa familia de rectas en función de varianzas de las variables del conjunto de puntos y su covarianza. Se observa en las expresiones resultantes que la esperanza no depende de las covarianzas de las variables, mientras que la varianza de la suma mencionada es menor a medida que disminuye el coeficiente de correlación.

Complementando el estudio de suma de cuadrados de distancias ortogonales se establecieron las Funciones de Probabilidad y Distribución de Probabilidad de la suma de cuadrados de distancias ortogonales de un conjunto de puntos a las rectas que pasan por su centroide.

Paralelamente al estudio referido en el anterior párrafo, Se determinaron Funciones de Probabilidad y de Distribución de Probabilidad de la suma de cuadrados de distancias verticales de un conjunto de puntos a las rectas que pasan por su centroide

Las Funciones de Probabilidad y Distribución de Probabilidad obtenidas se emplearon para realizar la siguiene aplicación práctica: Dado un conjunto de puntos en el plano y considerando la familia de rectas que pasan por su centroide, se determinó el intervalo de pendientes alrededor de la pendiente de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) pertenecientes a rectas que contengan el α (en tanto por uno) de las menores sumas de cuadrados Ortogonales, Adicionalmente se describió el método para determinar si la pendiente obtenida mediante el método de Mínimos Cuadrados Verticales está contenida en dicho intervalo. En forma similar, se realizó la siguiente aplicación: Dado un conjunto de puntos en el plano y considerando la familia de rectas que pasan por su centroide, se determinó el intervalo de pendientes alrededor de la pendiente de la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) pertenecientes a rectas que contengan el α (en tanto por uno) de las menores sumas de cuadrados verticales, también se describió el método para determinar si la pendiente obtenida mediante el método de Mínimos Cuadrados Ortogonales está contenida en dicho intervalo.

Otra aplicación del estudio de la suma de cuadrados de distancias ortogonales y verticales a la familia de rectas que pasan por su centroide fue determinar que para cualquier pendiente de dichas rectas la suma de cuadrados de distancias ortogonales es menor o igual a la suma de cuadrados de distancias verticales. Un corolario directo derivado del anterior concepto y de mucha importancia es la conclusión que la suma de cuadrados del error (ortogonal) para la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) es menor o igual que la suma de cuadrados del error (vertical) de la Recta de Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) sin importar el metodo (suma de cuadrados ortogonales o suma de cuadrados verticales) con que se define dicha recta.

No era el objeto primordial del este estudio el ajuste del modelo, si embargo, empleando la teoría desarrolada de la suma de cuadrados de distancias ortogonaes y verticales a la familia de rectas que pasan por su centroide se pudo demostrar que el Coeficiente de Determinación R^2 cuando se usan suma de cuadrados ortogonales es mayor o igual que R^2 cuando se emplea suma de cuadrados tradicionales (verticales). Pero el concepto puede ampliarse aún más: No importa cual de los metodos se haya empleado para definir la recta, Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV) o Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) si se determina R^2, este valor es siempre mayor o igual cuando se emplea el metodo de los Mínimos Cuadrados Ortogonales.

Se tomaron las varianzas y los intervalos de confianza para los parámetros de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) suministrados por Minitab Suport en “Methods and formulas for Orthogonal Regressión”, se adecuaron dichas expresiones de acuerdo a la teoría y nomenclatura empleada en este trabajo obteniéndose unas fórmulas mucho más agiles, reducidas y explicitas.

Se realizó una comparación para todas las circunstancias posibles y en función del coeficiente de correlación entre las varianzas del parámetro de pendiente de la Recta de Mínimos Cuadrados Ortogonales (RMCO) y Mínimos Cuadrados Verticales (RMCV), encontrandose máximos y mínimos para esas varianzas y observandose que en general dichas varianzas son parecidas para los dos tipos de rectas encontradas cuando los coeficientes de correlación entre las dos variables son en en valor absoluto altas y hay mayor varianza en el médodo ortogonal con relación al sistema tradicional (distancias verticales) cuando los coeficientes de correlación se acercan a cero.

Por último y como un aporte adicional, se aprovecho toda la teoría desarrollada en el presente trabajo, para diseñar una versión novedosa al clásico problema de Buffon resuelto en el año de 1777, en el trabajo que se presenta, la aguja no se lanza sobre una superficie con lineas paralelas o cuadricula. En lugar de esta retícula, se eligen un conjunto de puntos y se determina su centroide. Alrededor de dicho centroide se hace girar una aguja de gran dimensión y se encuentra la probabilidad que la suma de cuadrados ortogonales sea menor a una dimensión que se calcula matemáticamente. Con fundamento en esta probabilidad se estima con la aproximación deseada el número irracional π.

BIBLIOGRAFIA

[1] Lehmann, Geometría Analítica. Edit. Limmus, 1989

[2] Walpole, Myers, Myers, Ye, Probabilidad y Estadística, Octava Edición, Pearson, Pretnice Hall, 2007

[3] Deming W.L,   Statistical Adjusment of data. Wiley. NY*Statistical adjustment of data*. Wiley, NY. (Dover Publications edition 1985)

[4] Adcock, R. J. (1878). "A problem in least squares". *The Analyst*. Annals of Mathematics. 5 (2): 53–54

[5] Coolidge, J. L. (1913). "Two geometrical applications of the mathematics of least squares". *The American Mathematical Monthly*. 20 (6): 187–190.

[6] Apostol T.M] (2006) Cálculo de funciones de varias variables y algebra lineal con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y probabilidad. Editorial Reverte. Barcelona España.

[7] Zylberberg A.D. (2008) Probabilidad y Estadística. Editorial Nueva Librería

[8] Canavos G.C. Probabilidad y Estadística. Editorial Mc Graw Hill. Mexico.

[9] Kenney, J. F. and Keeping, E. S., *Mathematics of Statistics*, Pt. 2, 2nd ed. Princeton, NJ: Van Nostrand, 1951.

[10] Murray y Spiegel, Probabilidad y Estadística, Mc Graw Hill, 2014.

[11] Deming W. E. *Statistical adjustment of data*. Wiley, NY (Dover Publications edition, 1985).

[12] J. Vicente de Julián Ortiz. Lionello Pioglani. Emili Besalú. Two-Variable Linear Regression: Modeling with Orthogonal Least-Squares Analysis. Journal of Chemical Education. (ACS Publications 2010)

[13] Michael P. McLaughlin. Compendium of Common Probability Distributions. Iowa State University. 2016.

[14] Huss A[1], Spoerri A, Egger M, Röösli M; Swiss National Cohort Study. Residence near power lines and mortality from neurodegenerative diseases: longitudinal study of the Swiss population. Am Journal Epidemilogy. 2009 jan. 15. 169(2) 167-75.

[15] Eberly David Ph.D. Least Squares Fitting of Data. Geometric Tools. Washington. 2016.

[16] On Laplace's Extension of the Buffon Needle. Arnow Barry J. The College Mathematics Journal. Vol 25 No.1. 1994

[17] Neuts M.F., Purdue P. Buffon in the Round. Mathematics magazine Vol 44 No 2. 1971.

[18] Wood G.R., Robertson J.M. Buffon got in straight. Statistics & Probability Letters. 37. 1998.

[19] Adcock R.J. A Problem in Least Squares. Annals of Mathematics. Vol 5 No 2. 1878.

[20] Abdus Sattar Gazdar. Distance from a point to a plane. The College Mathematics Journal. Vol 23 No.5 1992.

[21] Minitab Suport en "Methods and formulas for Orthogonal Regressión. support.minitab.com.

[22] Richard L. BranhamJr. Orthogonal Regression in Astronomy. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. Vol 61. 1995.

[23] Habibollah Khajehsharifi. Masoumeh Sadeghi. Eslam Pourbasheer. Spectrophotometric simultaneous determination of ceratine, creatinine, and uric acid in real samples by orthogonal signal correction–partial least squares regression. Monatshefte für Chemie - Chemical Monthly. June 2009, Volume 140, Issue 6.

[24] Stein, Yaakov J. "Two Dimensional Euclidean Regression" 1983.

[25] I. Markovsky and S. Van Huffel, *Overview of total least squares methods.* Signal Processing, vol. 87, pp. 2283–2302, 2007.

[26] Cornbleet PJ, Gochman N. Incorrect least-squares regression coefficients in method-comparison analysis. Clin Chem. 1979 Mar;25(3):432-8. U.S. National Library of Medicine.

[27] Taliha Keles. Comparison of Classical Least Squares and Orthogonal Regression in Measurement Error Models, International Online Journal of Educational Sciences, 10(3), 200-214. 2018.

[28] Sandra Donevska, Eva Fiserova, Karel Hron. On the Equivalence between Orthogonal Regression and Linear Model. Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica 50, 2 (2011) 19–27.

[29] Rainer Haeckel, Werner Wosniok and Rainer Klauke. Comparison of ordinary linear regression, orthogonal regression, standardized principal component analysis, Deming and Passing-Bablok approach for method validation in laboratory. Laboratoriums Medizin June 2013. Journal of Laboratory Medicine.

(